

CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2015-2016 - Appello del 6 settembre 2016

NOME _____

COGNOME _____

Esercizio 1. È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Si consideri l'insieme V delle matrici reali 2×2 X che commutano con A , ovvero tali che $AX = XA$. Si verifichi che V è un sottospazio di matrici, e se ne calcoli la dimensione e una base.
- (b) Si consideri il sottosinsieme W di V formato dalle matrici simmetriche Y che commutano con A . Si verifichi che anche W è un sottospazio di matrici, e se ne calcoli la dimensione e una base.
- (c) Si verifichi che le matrici di W commutano con qualunque matrice 2×2 .

Esercizio 2. Dati due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} non nulli di \mathbb{R}^2 , si consideri la matrice $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T - \mathbf{v}\mathbf{u}^T$.

- (a) Si dimostri che A è non singolare se e solo se \mathbf{u} e \mathbf{v} sono linearmente indipendenti.
- (b) Si dimostri, senza calcolare gli autovalori, che se λ è autovalore di A lo è anche $-\lambda$.
- (c) Per

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

si calcolino autovalori e autovettori di A e A^T .

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

- (a) Per quali valori di α A è invertibile?
- (b) Per $\alpha = 1$ si calcoli l'inversa di A .

Esercizio 4. Sia $f(x) = x^4$.

- (a) Si calcoli, risolvendo un opportuno sistema lineare, il polinomio $p(x)$ che interpola $f(x)$ nei nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = -\alpha$, $x_3 = \alpha$, con $\alpha \neq -1, 1$.
- (b) (*facoltativo*) Per $\alpha \neq -1, 0, 1$, sia $q(x)$ il polinomio di grado massimo tre che approssima ai minimi quadrati $f(x)$ nei nodi x_0, x_1, x_2, x_3 , già assegnati al punto (a), e $x_4 = 0$. Senza calcolare $q(x)$, si dimostri che

$$\sum_{i=0}^4 (f(x_i) - q(x_i))^2 \leq \alpha^4.$$