CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2015-2016 - Appello del 6 luglio 2016

NOME **COGNOME**

Esercizio 1. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^3$ U e V, generati rispettivamente dagli insiemi di vettori $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ e $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$, con

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determinino le dimensioni dei sottospazi U, V, $U+V$ e $U \cap V$.

(b) Si individui una base di $U \cap V$.

(c) Vale la relazione $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$?

Esercizio 2. Dati due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ non nulli di $\mathbb{R}^3$, si consideri la matrice $A = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$.

(a) Si scelgono

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si determinino le soluzioni del sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{u}$.

(b) Siano $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{b}$ definiti come in (a). Senza risolverlo, si dimostri che le soluzioni del sistema $A^2\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ hanno la forma $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}$, dove $\boldsymbol{x}$ è una soluzione del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ e α è un opportuno numero reale.

(c) (*facoltativo*) Quali condizioni devono soddisfare $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{b}$ affinché i due sistemi lineari $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ e $A^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ abbiano entrambi soluzioni?

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Che cosa si può affermare riguardo agli autovalori di A, sfruttando le proprietà della matrice?

(b) Si calcolino gli autovalori di A, in funzione di α.

(c) Per $\alpha = 1$ si calcolino anche gli autovettori.

Esercizio 4. Sia $f(x) = 1 - \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right|$.

(a) Si calcoli il polinomio di interpolazione $p(x)$ che approssima $f(x)$ nei nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, risolvendo un opportuno sistema lineare.

(b) Si calcoli direttamente $p(2)$ con la formula di Lagrange.

(c) Si calcoli il polinomio $q(x)$ di grado massimo uno che approssima ai minimi quadrati $f(x)$ negli stessi nodi. Quale fra i polinomi $p(x)$ e $q(x)$ approssima meglio $f(2)$?