CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2012/2013 - Appello del 5 luglio 2013

NOME **COGNOME**

Esercizio 1 Sia V l'insieme dei vettori $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ i cui elementi x_i soddisfano la condizione:

$$x_i = x_{i-1} + x_{i+1}, \quad i = 2, \dots n-1.$$

(a) Si verifichi che V è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$.
(b) Si determini la dimensione di V e si indichi una base.
(c) Si determini una base ortonormale di V per $n = 5$.

Esercizio 2 Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove gli elementi a_{ij} e b_i di $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ rispettivamente sono così definiti:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \leq j \\ 2 & \text{se } i = j+1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad b_i = 1 \text{ per ogni } i.$$

(a) Si risolva il sistema con il metodo di Gauss.
(b) È possibile modificare l'elemento a_{n1} in modo tale che il sistema non abbia soluzioni?

Esercizio 3 Dato $k \in \mathbf{R}$ Si consideri la matrice seguente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -k & 0 \\ k & 2 & k \\ 0 & -k & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Usando i cerchi di Gerschgorin si stabilisca una condizione sufficiente su k affinché A ammetta un autovalore reale $\lambda > 4/3$.
(b) Per $\mathbf{x} = [\ 1\ 0\ -1\ ]^T$, si calcoli $A\mathbf{x} - \mathbf{x}$. Quali indicazioni si traggono dal risultato riguardo agli autovalori di A?
(c) Scelto $k \neq 0$ che rispetti la condizione trovata al punto a), si calcolino gli autovalori di A .

Esercizio 4 Si vuole interpolare una generica funzione $f(x)$ con un polinomio $p(x) = a_0 x + a_1$ su due nodi distinti x_0, x_1, con rispettivi valori $f(x_0)$, $f(x_1)$ (interpolazione lineare). Si esprimano i coefficienti a_0 e a_1 come funzioni di x_i e $f(x_i)$, procedendo nel modo seguente:

(a) considerando il sistema lineare $V \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \end{bmatrix}$ di cui sono soluzione;
(b) determinando l'inversa V^{-1} e moltiplicandola per $\begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \end{bmatrix}$.
(c) (*facoltativo*) Dato un terzo nodo x_2, distinto dai precedenti, e il corrispondente valore $f(x_2)$, si supponga di voler interpolare $f(x)$ sui tre nodi con un polinomio $q(x)$ di grado massimo due. Si determini una costante α che permette di esprimere $q(x)$ come

$$q(x) = p(x) + \alpha(x - x_0)(x - x_1).$$