CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2014-2015 - Appello del 10 giugno 2015

NOME **COGNOME**

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ $f(\boldsymbol{x})$ così definita:

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix},$$

con $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$.

(a) Si costruisca la matrice A associata a f quando su $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ si scelgono le rispettive basi canoniche.

(b) Si determinino l'immagine e il nucleo di A.

(c) Per quali valori del parametro reale α, se esistono, il vettore $\boldsymbol{z} = [\alpha,\ 1,\ 1,\ 1]^T$ appartiene all'immagine di A?

(d) (*facoltativo*) Si determini una matrice 3×4 B tale che $BA = I_3$, dove I_3 è la matrice identica di ordine 3.

Esercizio 2. Sia D una matrice diagonale

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix},$$

con elementi diagonali distinti. Si dimostri che per ogni vettore $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ con elementi non nulli i tre vettori $\boldsymbol{x}, D\boldsymbol{x}, D^2\boldsymbol{x}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Si applichi il teorema di Gerschgorin per la localizzazione degli autovalori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Che cosa si può stabilire riguardo al numero di autovalori reali di A e ai loro intervalli di appartenenza?

(b) Si considerino le matrici

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{e } B = DAD^{-1}.$$

Si migliori la localizzazione degli autovalori reali di A applicando il teorema di Gerschgorin a B.

(c) Si verifichi che $\lambda = 1$ è autovalore di A e se ne calcoli un autovettore.

Esercizio 4. Sia $p(x)$ il polinomio di interpolazione che approssima la funzione $f(x) = 2 - \sqrt{4x - x^2}$, nei nodi $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$. Si calcoli $p(x)$ in entrambi i modi seguenti:

(a) risolvendo un opportuno sistema lineare;

(b) applicando la formula di Lagrange.