CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2012/2013 - Appello del 1 febbraio 2013

NOME **COGNOME**

Esercizio 1 Si consideri la matrice reale 4×4:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -7 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini una base ortonormale del sottospazio $S(A)^{\perp}$.
(b) Esistono vettori $\mathbf{x}$ non nulli per i quali $A\mathbf{x} = A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$?

Esercizio 2 Si consideri la matrice reale 4×4:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Si verifichi che $\operatorname{rank} A^2 < \operatorname{rank} A$.
(b) Si dimostri, tenendo conto della relazione verificata al punto (a), che A non è diagonalizzabile (suggerimento: se A fosse diagonalizzabile, la sua forma diagonale D avrebbe lo stesso rango di A).

Esercizio 3 Si consideri la matrice 4×4 A, i cui elementi a_{ij} sono così definiti

$$a_{ij} = \min(i, j).$$

Si calcoli, se esiste, A^{-1}.

Esercizio 4 È data la funzione $f(x) = \frac{1}{x+a}$, dove a è un parametro reale, $a > 1$. Si vuole approssimare $f(x)$ con il polinomio ai minimi quadrati $p(x)$ di grado massimo uno, rispetto ai nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.
(a) Si calcolino i coefficienti del polinomio $p(x)$ in funzione di a.
(b) Esistono valori di a per cui $p(0) = f(0)$?
(c) (*facoltativo*) Si dimostri che, per qualunque funzione $f(x)$ e qualunque insieme di tre nodi distinti x_0, x_1, x_2, detto $p(x)$ il polinomio ai minimi quadrati di grado massimo uno, se esiste un nodo x_k per cui $p(x_k) = f(x_k)$, allora $p(x_i) = f(x_i)$ anche per $i \neq k$.