

CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2009/2010 - Appello del 14 giugno 2010

Esercizio 1 È data una matrice A , quadrata di ordine n , e si indica con $S(A)$ l'immagine di A .

- (a) Si dimostri che $S(A^2) \subset S(A)$.
(b) Per $n = 3$ e k numero reale, si consideri

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k-1 & -k+1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -k & k \end{bmatrix}.$$

Applicando il metodo di Gauss ad A e ad A^2 , si studi il comportamento di $\text{rk}(A)$ e di $\text{rk}(A^2)$ al variare di k .

- (c) Si determinino i valori di k per i quali $S(A^2) = S(A)$.

Esercizio 2 Si consideri il sottospazio S di \mathbf{R}^4 generato dai vettori $[1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ e $[1 \ 1 \ 1 \ -1]^T$. Si determini una base ortonormale del sottospazio ortogonale S^\perp .

Esercizio 3 È data la matrice A , quadrata di ordine n così definita:

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha, & \text{per } i = 1 \text{ e } j = n, \\ 1, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

con α numero reale, $\alpha \neq 1$.

- (a) Senza effettuare calcoli, si dica quanto vale $\text{rk}(A)$. Che cosa si può affermare immediatamente riguardo agli autovalori di A ?
(b) Sia $n = 4$. Si considerino le matrici

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = SAS^{-1},$$

e si calcoli il polinomio caratteristico di B .

- (c) Tenendo conto di quanto ottenuto in (b), si calcolino gli autovalori di A .

Esercizio 4 Si consideri la funzione $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$, e i punti $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

- (a) Si calcolino i coefficienti del polinomio $p(x)$ di grado massimo 2 che interpola $f(x)$ in x_0 , x_1 e x_2 ;
(b) si calcolino i coefficienti del polinomio $q(x)$ di grado massimo 2 che interpola $f(x)$ in x_0 , x_2 e x_3 ;
(c) (*facoltativo*) si consideri il polinomio di grado al più 3

$$s(x) = \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} p(x) + \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} q(x).$$

Si valutino i valori $s(x_i)$, e si dica che proprietà ha il polinomio $s(x)$.