CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2011/2012 - Appello del 10 luglio 2012

NOME **COGNOME**

Esercizio 1 Si considerino la matrice A e il vettore $\mathbf{b}$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & -5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Senza calcolare A^2:

(a) Si risolva il sistema lineare $A^2\mathbf{x} = \mathbf{b}$, risolvendo nell'ordine, i due sistemi $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ e $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

(b) Che relazione c'è tra i nuclei $N(A)$ e $N(A^2)$? Si trovino, se esistono, delle basi di $N(A)$ e di $N(A^2)$, tali che la prima sia un sottoinsieme della seconda.

Esercizio 2 Sia $\mathbf{v}$ un vettore non nullo di $\mathbf{R}^3$, e sia X il sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$, formato dai vettori $\mathbf{x}$ che soddisfano le relazioni:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{v} = 1,$$

$$\mathbf{x}\mathbf{v}^T - \mathbf{v}\mathbf{x}^T = O_{3\times 3},$$

dove $O_{3\times 3}$ indica la matrice nulla 3×3.

(a) Si verifichi che X è l'insieme delle soluzioni di un opportuno sistema lineare.

(b) Si verifichi che il sistema lineare indicato al punto (a) ha una sola soluzione, per qualunque $\mathbf{v}$ non nullo.

(c) Si esamini il caso particolare $\mathbf{v} = [1\ 1\ 1]^T$.

(d) (*facoltativo*) Si dimostri che in $\mathbf{R}^n$, assegnato $\mathbf{v}$ non nullo, esiste un solo vettore $\mathbf{x}$ che soddisfa le relazioni proposte.

Esercizio 3 È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Si disegnino i cerchi di Gerschgorin, per righe e per colonne, le rispettive unioni e l'intersezione delle unioni. Quali limitazioni si possono dare per gli autovalori?

(b) Si consideri la matrice $B_k = S_k^{-1}AS_k$, dove, per k reale, S è la matrice

$$S = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Che relazione c'è tra gli autovalori di B_k e quelli di A?

(c) Esistono valori di $k > 1$, tali che i cerchi di Gerschgorin di B_k, per righe o per colonne, siano disgiunti? In tal caso che cosa si può concludere riguardo agli autovalori di A?

Esercizio 4 Data la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, e i nodi $x_0 = -2$, $x_1 = -1$,$x_2 = 0$, $x_3 = 1$,$x_4 = 2$.

(a) Si calcolino i coefficienti del polinomio $p(x)$ di approssimazione ai minimi quadrati di grado massimo due che approssima $f(x)$ nei nodi assegnati.

(b) Si disegnino i grafici di $f(x)$ e $p(x)$ nell'intervallo $[-2, 2]$.