

CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2011/2012 - Appello del 14 giugno 2012

NOME

COGNOME

Esercizio 1 Si consideri l'applicazione lineare da \mathbf{R}^4 in \mathbf{R}^3 $f(\mathbf{x})$ così definita:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 + x_4 \\ -2x_1 - 4x_2 + kx_3 + 2x_4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 \end{bmatrix},$$

dove $k \in \mathbf{R}$.

- Si costruisca la matrice A associata a f quando su \mathbf{R}^4 e \mathbf{R}^3 si scelgono le rispettive basi canoniche.
- Si dica per quali valori di k il rango di A risulta minimo.
- Si assegni a k uno di tali valori e si indichino una base di $S(A)$ e una base di $N(A)$.
- Si ortonormalizzi con il metodo di Gram-Schmidt la base di $S(A)$ trovata al punto (c).

Esercizio 2 Si consideri la matrice quadrata A di ordine 3 così definita:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Si verifichi che A non è diagonalizzabile per similitudine.
- (*facoltativo*) Si determini una matrice triangolare superiore T della forma

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & 1 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{bmatrix},$$

tale che A sia simile a T .

Esercizio 3 Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

si consideri l'insieme \mathcal{S} formato dalle matrici B che commutano con A , ovvero tali che sia $AB = BA$.

- Si verifichi che \mathcal{S} è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^{3 \times 3}$.
- Si calcoli la dimensione di \mathcal{S} , e se ne indichi una base.

Esercizio 4 Data la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, e i nodi $x_0 = 1$, $x_1 = 4$,

- si calcolino i coefficienti del polinomio $p(x)$ di interpolazione che approssima $f(x)$ nei nodi assegnati;
- si calcoli il $\max_{1 \leq x \leq 4} |f(x) - p(x)|$, e lo si confronti con la limitazione ottenuta dal teorema del resto dell'interpolazione.