CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2010/2011 - Appello del 16 giugno 2011

NOME **COGNOME**

Esercizio 1 Si consideri l'applicazione lineare da $\mathbf{R}^4$ in $\mathbf{R}^4$ $f(\mathbf{x})$ così definita:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \\ -x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 \end{bmatrix}.$$

(a) Si costruisca la matrice A associata a f quando su $\mathbf{R}^4$ si sceglie la base canonica.
(b) Applicando il metodo di Gauss ad A, si determinino l'immagine e il nucleo di f.
(c) Detta s la dimensione del nucleo di f, si indichi una base di $\mathbf{R}^4$ della forma

$$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{4-s}\},$$

dove i vettori $\mathbf{v}_i$ appartengono al nucleo e i vettori $\mathbf{w}_i$ appartengono al sottospazio di $\mathbf{R}^4$ ortogonale al nucleo.
(d) Si costruisca la matrice P del cambiamento di base dalla base canonica alla base ottenuta al punto (c).
(e) Sia B la matrice che rappresenta f rispetto alla nuova base. Senza calcolare B, si dica quanti dei suoi elementi sono certamente nulli, e in quali posizioni.

Esercizio 2 Si consideri la matrice quadrata $A = (a_{ij})$ di ordine 4 così definita:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i + j \text{ è pari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Si calcolino autovalori e autovettori di A.

Esercizio 3 Sono date le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 15 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}, \quad \text{con } k \text{ reale, non nullo.}$$

(a) Usando i cerchi di Gerschgorin si localizzino nel miglior modo possibile gli autovalori di A;
(b) si considerino la matrice $B = S^{-1}AS$, e i suoi cerchi di Gerschgorin; si scelga, se è possibile, k in modo che i cerchi di B (per righe) siano a due a due disgiunti; si ottiene in questo modo una migliore localizzazione degli autovalori di A?

Esercizio 4 Si consideri la funzione $f(x) = 2^x$, e i valori $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.
(a) Si calcolino i coefficienti del polinomio $p(x)$ di grado massimo 2 che interpola $f(x)$ nei nodi assegnati;
(b) si calcolino i coefficienti del polinomio $q(x)$ di grado massimo 1 che approssima ai minimi quadrati $f(x)$ nei nodi assegnati;
(c) si trovi, utilizzando il teorema del resto, una costante positiva M tale che sia $|f(x)-p(x)| \leq M$, per $-1 \leq x \leq 1$.
(d) (*facoltativo*) Si verifichi che $\max\limits_{-1\leq x\leq 1} |f(x) - p(x)| < \max\limits_{-1\leq x\leq 1} |f(x) - q(x)|$.