CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2008/2009 - Appello del 16 giugno 2009

NOME **COGNOME**

Esercizio 1 Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

la si riduca in forma a scalini con il metodo di Gauss.
(a) Si determino le dimensioni del nucleo $N(A)$ e dell'immagine $S(A)$, e si indichino delle basi dei due sottospazi;
(b) si costruisca anche una base ortonormale di $N(A)$.

Esercizio 2 Si considerino le matrici 3×3 $A(k)$ così definite:

$$A(k) = \begin{bmatrix} 5 & 1 & k \\ 1 & -1 & 0 \\ k+3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbf{R}.$$

(a) si verifichi che esistono due soli valori di k_1 e k_2 di k, con $k_1 < k_2$, per i quali $A(k)$ è singolare.
(b) Per $k = k_2$, si consideri l'insieme Z formato da tutte le soluzioni $\mathbf{x}$ dei sistemi $A(k_2)\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $\mathbf{b}$ è un qualsiasi vettore di $\mathbf{R}^3$ con le componenti uguali: $b_1 = b_2 = b_3$. Z è vuoto? È un spazio vettoriale? In tal caso se ne indichi una base.

Esercizio 3 Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si calcolino autovalori e autovettori di A;
(b) si dica se A è o non è diagonalizzabile, e perché.

Esercizio 4 Si vuole approssimare il polinomio $f(x) = x^3 + 1$ con il polinomio di interpolazione $p(x)$ di grado massimo due, che assume gli stessi valori di $f(x)$ nei punti $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = \alpha$, con $\alpha \neq x_0, x_1$. Si calcolino i coefficienti di $p(x)$ in funzione di α, in entrambi i modi seguenti:
(a) risolvendo un opportuno sistema lineare;
(b) esprimendo prima il resto $r(x) = f(x) - p(x)$ con la formula data dal teorema del resto dell'interpolazione, e poi ricavando $p(x)$ come $f(x) - r(x)$.
A quale polinomio tende $p(x)$ se si fa tendere α a 0?