

CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2008/2009 - Appello del 15 settembre 2009

NOME

COGNOME

Esercizio 1 Si consideri l'applicazione lineare da \mathbf{R}^4 in \mathbf{R}^4 $f(\mathbf{x})$ così definita:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 8x_4 \\ -x_1 + (3k + 1)x_2 + 2x_3 - 5x_4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + kx_4 \end{bmatrix},$$

dove k è un numero reale.

- Si costruisca la matrice A associata a f quando su \mathbf{R}^4 si sceglie la base canonica.
- Applicando il metodo di Gauss ad A , si determini, al variare di k , la dimensione minima dell'immagine di f ;
- scelto un valore di k per cui tale dimensione è minima, si determini un vettore della forma $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ 1]$ tale che sia $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Esercizio 2 Si consideri la matrice quadrata di ordine 3:

$$A = I - 2\mathbf{u}\mathbf{v}^T,$$

dove I è la matrice identica di ordine 3, e $\mathbf{u}^T = [1 \ 1 \ 1]$, $\mathbf{v}^T = [1 \ -1 \ 1]$.

- Si verifichi che $\det A \neq 0$, e si calcoli l'inversa A^{-1} , ottenendola dall'aggiunta di A .
- Si verifichi che esiste un numero α tale che $A^{-1} = I + \alpha\mathbf{u}\mathbf{v}^T$.

Esercizio 3 È data la matrice A quadrata di ordine 3 così definita:

$$a_{ij} = 2^{-|i-j|}.$$

- Usando i cerchi di Gerschgorin si diano una limitazione inferiore e una superiore degli autovalori di A ;
- si consideri la matrice $B = A - 3/4I$, dove I è la matrice identica di ordine 3, e se ne calcolino polinomio caratteristico e autovalori;
- sfruttando la conoscenza degli autovalori di B , si indichino gli autovalori di A .

Esercizio 4 Data la funzione $f(x) = \log_2 x$,

- si calcolino i coefficienti del polinomio di grado massimo 2 che la interpola in $x_0 = 1/2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.
- si esprima il resto con la formula data dal teorema del resto, e se ne dia una limitazione superiore del modulo nell'intervallo $[1/2 \ 2]$.