CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
Seconda prova intermedia - A.A. 2014/2015 - 8/1/2015

NOME **COGNOME**

Esercizio 1. È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

con $k \in \mathbb{R}$.

(a) Per quali valori di k A è diagonalizzabile?.

(b) Si scelga un valore di k per cui A non è diagonalizzabile. Per tale valore si dica se esistono due autovettori di A ortogonali.

Esercizio 2. Si applichi il teorema di Gerschgorin, per righe e per colonne, alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & \frac{3}{2} & 9 \end{bmatrix}.$$

(a) È possibile stabilire se gli autovalori di A sono tutti reali? In tal caso, quali sono le migliori limitazioni che si possono ottenere, per ogni autovalore?

(b) Tenendo conto di quanto ottenuto al punto precedente, si trovino le migliori limitazioni possibili α e β tali che $\alpha \leq \max_i |\lambda_i| \leq \beta$.

Esercizio 3. Si vuole approssimare con il polinomio di interpolazione $s(x)$ una funzione $f(x)$, di cui sono dati i valori nei nodi $x_0 = -1, \ x_1 = 0, \ x_2 = 1$:

$$f(x_0) = -1, \ f(x_1) = -1, \ f(x_2) = 1.$$

(a) Si calcoli $s(x)$.

(b) Si calcolino il polinomio $p(x)$ che interpola $f(x)$ in x_0 e x_1, e il polinomio $q(x)$ che interpola $f(x)$ in x_1 e x_2, e si verifichi che esistono due costanti α e β tali che $s(x) = \alpha p(x)(x - x_2) + \beta q(x)(x - x_0)$.

(c) (*facoltativo*) Si dimostri che per qualunque scelta di nodi distinti $x_0, \ x_1, \ x_2$, e qualunque funzione $f(x)$, detti $s(x)$, $p(x)$ e $q(x)$ i polinomi definiti come nei punti precedenti, esiste una costante α per cui vale la relazione $s(x) = \alpha p(x)(x - x_2) - \alpha q(x)(x - x_0)$.