CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
Seconda prova intermedia - A.A. 2010/2011 - 31/5/2011

NOME **COGNOME**

Esercizio 1 Si consideri, per $k \in \mathbf{R}$, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si calcolino gli autovalori di A, in funzione di k.
(b) Si indichino i valori di k per i quali A non è diagonalizzabile, giustificandone il motivo.
(c) (*facoltativo*) Si assegni a k un valore per cui A non è diagonalizzabile, e si trovi una matrice invertibile S tale che valga la relazione $AS = ST$, dove T ha la forma

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & 1 & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2 È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si calcoli $B = AA^T$. B può essere singolare?
(b) Si applichi il teorema di Gerschgorin a B, per ottenere una localizzazione dei suoi autovalori $\lambda_i,\ i = 1, \dots, 5$.
(c) Si trovino delle costanti positive M e m tali che

$$M \geq \max_i |\lambda_i|, \quad m \leq \min_i |\lambda_i|.$$

(per la seconda limitazione si tenga conto della relazione che lega gli autovalori al determinante di B).
(d) B può avere autovalori reali negativi?

Esercizio 3 Di una funzione $f(x)$ sono noti i valori $f(-1) = 1, f(0) = k, f(1) = 1, f(2) = 4$, con $k \in \mathbf{R}$.
(a) Si calcolino il polinomio di interpolazione $p(x)$ e il polinomio ai minimi quadrati di grado al più due $q(x)$, che la approssimano nei quattro nodi assegnati.
(b) Si calcoli il valore di k per cui $p(x)$ ha grado 2. Si verifichi che per tale valore di k si ha $p(x) \equiv q(x)$, e si dica perché.