CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
Prima prova intermedia - A.A. 2015/2016 - 27/11/2015

NOME **COGNOME**

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare f da $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^4$ così definita:

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_2 - x_3 \\ x_1 - x_4 \\ x_4 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix},$$

per ogni vettore $\boldsymbol{x} = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T$ di $\mathbb{R}^4$.

(a) Si determini la matrice A che rappresenta f, se si sceglie come base di $\mathbb{R}^4$ la base canonica. L'applicazione f è invertibile?

(b) Si determinino le dimensioni e delle basi di $S(A)$ e di $N(A)$.

(c) Detta f' la restrizione di f a $S(A)$, ovvero l'applicazione lineare definita come $f'(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$, per $\boldsymbol{x} \in S(A)$, si trovi la matrice B che la rappresenta, rispetto alla base di $S(A)$ scelta al punto (b).

(d) Per quale ragione B è necessariamente invertibile?

Esercizio 2. Detti $\boldsymbol{e}_i,\ i = 1, 2, 3$, i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$, si consideri l'insieme ordinato $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$ con $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{e}_1$.

(a) Si verifichi che i vettori assegnati sono linearmente indipendenti, e si costruisca, a partire da loro, un insieme di vettori ortonormali $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3\}$, con il procedimento di Gram-Schmidt.

(b) Detta Y la matrice $[\boldsymbol{y}_1|\boldsymbol{y}_2|\boldsymbol{y}_3]$ e detto $\boldsymbol{e}$ il vettore $[\,1,\ 1,\ 1\,]^T$, si verifichi che i vettori $\boldsymbol{e}$ e $Y\boldsymbol{e}$ hanno la stessa lunghezza. Qual è la ragione di questa proprietà?

Esercizio 3. È dato il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & k \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix},$$

con $k \in \mathbb{R}$.

(a) Si determini un valore di k per cui il sistema ha infinite soluzioni.

(b) Per tale valore di k si esprimano tutte le soluzioni nella forma $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ e tali che $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v} = 1$.

G