

CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
Prima prova intermedia - A.A. 2015/2016 - 26/11/2015

NOME

COGNOME

Esercizio 1. È dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & k \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

con $k \in \mathbb{R}$.

- (a) Si applichi il metodo di Gauss per risolvere il sistema, al variare di k .
- (b) Esistono valori di k per cui il sistema ha infinite soluzioni?
- (c) Si determini, se esiste, un valore di k per cui esiste una soluzione linearmente dipendente dal vettore $[1, 2, -4]^T$.

Esercizio 2. È data la matrice A quadrata di ordine n , i cui elementi a_{ij} sono così definiti:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 2 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

- (a) Per $n = 4$ si calcoli il determinante di A usando il metodo di Gauss;
- (b) in alternativa al metodo di Gauss, per $n = 4$ si calcoli il determinante di A applicando alle righe e alle colonne le seguenti combinazioni lineari:
 - si sottragga dalla riga i -esima la riga $(i + 1)$ -esima, per $i = 1, \dots, n - 1$;
 - si aggiunga alla colonna j -esima la colonna $(j - 1)$ -esima, per $j = 2, \dots, n$.
- (c) Si estenda ad n qualunque il procedimento descritto al punto (b) per calcolare il determinante di A .

Esercizio 3. Dati i seguenti vettori di \mathbb{R}^3

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

si consideri il sottospazio V da essi generato.

- (a) Si determini la dimensione di V e una sua base.
- (b) Si determini una base di V^\perp .
- (c) Qual è la matrice P che rappresenta la proiezione di \mathbb{R}^3 su V , se si sceglie su \mathbb{R}^3 la base canonica e su V la base trovata al punto (a)?