

CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
Prima prova intermedia - A.A. 2012/2013 - 5/12/2012

NOME

COGNOME

Esercizio 1. Si considerino i vettori di \mathbf{R}^5 :

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

- Si verifichi che \mathbf{u}_5 può essere espresso come combinazione lineare dei vettori \mathbf{u}_i , $i = 1, \dots, 4$ e si determinino tutte le possibili scelte dei coefficienti;
- sfruttando la risposta data al punto (a) si dica se \mathbf{u}_5 dipende linearmente da \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_3 e \mathbf{u}_4 ;
- sfruttando ancora la risposta data al punto (a) si dica se \mathbf{u}_5 dipende linearmente da \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_3 ;
- si trovi una base del sottospazio ortogonale al sottospazio generato da tutti i vettori \mathbf{u}_i , $i = 1, \dots, 5$.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare f , da \mathbf{R}^3 in se stesso, così definita:

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}), \quad y_i = \sum_{k=1}^i (-1)^k x_k.$$

- Si determini la matrice A che rappresenta f rispetto alla base canonica di \mathbf{R}^3 ;
- si consideri su \mathbf{R}^3 la nuova base formata dai vettori

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{e}_3.$$

Qual è la matrice del cambiamento di base?

- Come si ottiene da A la matrice B che rappresenta f rispetto alla nuova base? Si calcoli B .

Esercizio 3 Si consideri la matrice A 5×5 così definita:

$$a_{ij} = \begin{cases} -\alpha + 1 & \text{per } i = j \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

con α numero reale. Si dica per quali valori di α A è invertibile, applicando il metodo di Gauss alla matrice ottenuta da A riordinandone le righe in ordine inverso.