CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
Prima prova intermedia - A.A. 2013/2014 - 22/11/2013

NOME **COGNOME**

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & k & -k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ k+1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ e $k \in \mathbf{R}$.

a) Per quali valori di k il sistema ammette soluzioni?

b) Si scelga un valore di k per cui il sistema ammette infinite soluzioni, e si determinino il nucleo $N(A)$ e l'immagine di $S(A)$ e le loro dimensioni.

c) Per il valore di k scelto al punto precedente si verifichi che $N(A^2) = N(A)$, senza calcolare A^2.

Esercizio 2 Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche dei due spazi.

a) Si determini la matrice B che rappresenta f rispetto alle basi

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

di $\mathbf{R}^3$ e $\mathbf{R}^2$ rispettivamente.

b) Si dica come si può modificare il terzo vettore della base di $\mathbf{R}^3$ in modo che B abbia una colonna nulla.

Esercizio 3. Si consideri la matrice quadrata di ordine 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix},$$

con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, e $\alpha \neq 0$.

a) Si calcoli A^{-1} usando il metodo di Gauss.

b) Si calcoli A^{-1} usando la relazione che esprime l'inversa mediante la matrice aggiunta.

c) Nel caso particolare $\alpha = 1$, $\gamma = 0$, si dica se esistono valori di β che rendono $A + A^{-1}$ singolare.

C