CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
Prima prova intermedia - A.A. 2015/2016 - 26/11/2015

NOME **COGNOME**

Esercizio 1. È dato il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & k \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

con $k \in \mathbb{R}$.

(a) Si applichi il metodo di Gauss per risolvere il sistema, al variare di k.

(b) Esistono valori di k per cui il sistema ha infinite soluzioni?

(c) Si determini, se esiste, un valore di k per cui esiste una soluzione linearmente dipendente dal vettore $[\,2,\ 2,\ 1\,]^T$.

Esercizio 2. È data la matrice A quadrata di ordine n, i cui elementi a_{ij} sono così definiti:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

(a) Per $n = 4$ si calcoli il determinante di A usando il metodo di Gauss;

(b) in alternativa al metodo di Gauss, per $n = 4$ si calcoli il determinante di A applicando alle righe e alle colonne le seguenti combinazioni lineari:

- si sottragga dalla riga i-esima la riga $(i+1)$-esima, per $i = 1, \dots, n-1$;
- si aggiunga alla colonna j-esima la colonna $(j-1)$-esima, per $j = 2, \dots, n$.

(c) Si estenda ad n qualunque il procedimento descritto al punto (b) per calcolare il determinante di A.

Esercizio 3. Dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

si consideri il sottospazio V da essi generato.

(a) Si determini la dimensione di V e una sua base.

(b) Si determini una base di $V^{\perp}$.

(c) Qual è la matrice P che rappresenta la proiezione di $\mathbb{R}^3$ su V, se si sceglie su $\mathbb{R}^3$ la base canonica e su V la base trovata al punto (a)?

B