

## CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare  
Prima prova intermedia - A.A. 2014/2015 - 27/11/2014

NOME

COGNOME

---

**Esercizio 1.** È dato il sistema lineare  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Si verifichi che  $A$  è singolare e che il sistema ha infinite soluzioni.
- (b) Si determini, se esiste, una soluzione ortogonale al vettore  $\mathbf{e} = [1, 1, 1, 1]^T$
- (c) Si consideri la matrice  $A^T A$ , e, senza calcolarla, si dimostri che è singolare e che ha lo stesso rango di  $A$  (Suggerimento: si studi che relazione c'è tra  $N(A^T A)$  e  $N(A)$ ).

**Esercizio 2.** Si consideri l'insieme  $V$  delle matrici quadrate  $A$ , di ordine  $n$ , che soddisfano la relazione

$$A^2 - 4A = O.$$

- (a) Si dica se  $V$  è un sottospazio di  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .
- (b) Quali sono le matrici invertibili contenute in  $V$ ?
- (c) Che relazione c'è tra le immagini  $S(A)$  e  $S(A^2)$ ?
- (d) Sia  $n = 3$  e

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si verifichi che  $A \in V$  e si determini una base di  $N(A)$ .

**Esercizio 3.** È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix},$$

con  $\alpha$  parametro reale.

- (a) Per quali valori di  $\alpha$   $A$  è invertibile?
- (b) Scelto  $\alpha$  in modo che risulti  $\det A = -1$ , si calcoli l'inversa di  $A$ .
- (c) Per lo stesso valore di  $\alpha$  scelto al punto (b) si ortonormalizzino le colonne di  $A$  con il metodo di Gram-Schmidt.