CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
Prima prova intermedia - A.A. 2009/2010 - 15/4/2010

NOME **COGNOME**

Esercizio 1 Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ così definita:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \\ -x_1 + 7x_2 + 2x_3 \\ -3x_2 - x_3 - x_4 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \end{bmatrix}.$$

(a) si consideri la matrice A che la rappresenta rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^4$, e, applicando ad A il metodo di Gauss, si calcolino le dimensioni dell'immagine $S(A)$ e del nucleo $N(A)$, e si determinino delle basi per entrambi i sottospazi;
(b) si trovi una base per il sottospazio $N(A)^\perp$, ortogonale al nucleo di A;
(c) sia g l'applicazione lineare $g : N(A)^\perp \to S(A)$, definita come $g(x) = f(x)$: si scriva la matrice B che la rappresenta, se si considera per $N(A)^\perp$ la base trovata in (b) e per $S(A)$ la base trovata in (a); si verifichi che B è invertibile e si spieghi perché deve esserlo necessariamente.

Esercizio 2 Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix},$$

dove k è un parametro reale.
(a) si calcoli $\det A$ con la regola di Laplace, e si dica per quali valori di k A è invertibile;
(b) si calcoli con il metodo di Gauss la prima colonna di A^{-1}, in funzione di k.

Esercizio 3 Data la matrice 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

si consideri l'insieme V delle matrici B che commutano con A: $AB = BA$.
(a) Si verifichi che V è uno spazio vettoriale di dimensione 2, e se ne trovi una base (si risolva il sistema lineare ottenuto da $AB = BA$, avente come incognite i quattro elementi di B);
(b) (*facoltativo*) si consideri lo stesso problema per A generica matrice 2×2, e si dimostri che $\dim V \geq 2$.