

Esercizi L5 (Modelli di Calcolo) 18/3 - 19/3 2020

Sommario: 18 marzo, 2020

- (a) Si fornisca una grammatica per la sintassi astratta del λ -Calcolo in accordo alla notazione utilizzata nell'albero astratto $[\lambda - ([x], [\lambda - ([y], [\textcircled{-} - ([x], [y])])])]$.
(b) Si mostri poi, che tale albero è ottenuto dalla grammatica data.
- (a) Si fornisca una grammatica per la sintassi concreta del λ -Calcolo in accordo alle proprietà date per associatività e precedenza tra operatori.
(b) Si mostri poi, la sintassi concreta dell'albero astratto $[\lambda - ([x], [\lambda - ([y], [\textcircled{-} - ([x], [y])])])]$.
(c) Si mostri, infine il parse tree del termine ottenuto al punto (b) precedente.
- Si completino i calcoli indicati con '...' nelle slides precedenti.
- Si mostri la sequenza di α -red applicate per ridurre il termine dato ad un termine contenente sempre, identificatori diversi per variabili diverse:
 $\lambda x.\lambda y.(\lambda x.y(\lambda y.x)x)(\lambda y.x(\lambda x.yx)y)$
- (a) Si mostri la valutazione di $\lambda x.\lambda y.(\lambda x.y(\lambda y.x)x)(\lambda y.x(\lambda x.yx)y)$.
(b) Nell'ipotesi di aver usato α -red nella valutazione fornita se ne giustifico l'uso.
- 5bis Si mostri la valutazione di $(\lambda y.(\lambda x.\lambda z.zx)(\lambda x.yzx))(\lambda x.xx)(\lambda x.\lambda y.y)$.
- 6 Si mostri la valutazione di $\lambda x.(\lambda y.\lambda x.x y)(\lambda y.y x)y$.
- 7 Si dimostri che: $\forall F, \Psi F = F(\Psi F)$
- 7bis Si mostrino le riduzioni ($\rightarrow_\alpha, \rightarrow_\beta, \rightarrow_\eta, \rightarrow_{e/\text{true}/\text{false}/\text{if}/\Psi}$) ottenute per il termine $\Psi(F)[3]$, dove F sia il λ -termine per il funzionale fattoriale.
- (a) Si scriva, in Lambda-Calcolo, un programma per la funzione plus introdotta nell'aritmetica data per tale linguaggio.

Esercizi L5 (Modelli di Calcolo) 18/3 - 19/3 2020 /2

Sommario: 15 marzo, 2018

- 9 Si scriva, in Lambda-Calcolo, un programma per la funzione `zero` che calcola `true` quando applicata a `[0]`, `false` altrimenti. (b) Si mostri la computazione di `zero[2]`.
- 10 Si scriva, in Lambda-Calcolo, un programma per la funzione predecessore `pred` che calcoli il predecessore di naturali nell'aritmetica data per il linguaggio. (b) Si mostri la computazione di `pred[2]`.
- 11 Si scriva, in Lambda-Calcolo, un programma per la funzione `eq` che calcola l'uguaglianza nell'aritmetica data per il linguaggio `false` (allo scopo si faccia uso anche dell'operazione `pred`, discussa in esercizio L5.10). (b) Si mostri la computazione di `eq[2][1]`.
- 12 Si dia una semantica SOS per la Logica Combinatoria
- 13 Si dimostri che $SKK = I$
- 14 Si scriva, in Logica Combinatoria, un programma per la funzione `plus` introdotta nell'aritmetica data per tale linguaggio.
- 15 In π -Calcolo, il termine $P_1 + \dots + P_n$ equivale ad ogni termine corrispondente ad un albero binario con nodi interni `+` e frontiera ogni permutazione di P_1, \dots, P_n . Si mostri il significato dell'affermazione, discutendo i seguenti punti:
 - 1) Fornire una definizione della corrispondenza π -termine/albero binario;
 - 3) Esprimere il numero di tali, diversi, alberi binari;
 - 4) Dire se, e quali, altri operatori del π -Calcolo mostrano analogha proprietà.

Esercizio (1)

- (a) Si fornisca una grammatica per la sintassi astratta del λ -Calcolo in accordo alla notazione utilizzata nell'albero astratto $[\lambda - ([x], [\lambda - ([y], [\Theta - ([x], [y])])])]$.
- (b) Si mostri poi, che tale albero è ottenuto dalla grammatica data.

Soluzione

Esercizio (2)

- (a) Si fornisca una grammatica per la sintassi concreta del λ -Calcolo in accordo alle proprietà date per associatività e precedenza tra operatori.
- (b) Si mostri poi, la sintassi concreta dell'albero astratto $[\lambda - ([x], [\lambda - ([y], [@ - ([x], [y])]])]$.
- (c) Si mostri, infine il parse tree del termine ottenuto al punto (b) precedente.

Soluzione

Esercizio (3)

Si completino i calcoli indicati con '...' nelle slides precedenti.

Soluzione

Esercizio (4)

Si mostri la sequenza di α - red applicate per ridurre il termine dato ad un termine contenente sempre, identificatori diversi per variabili diverse: $\lambda x.\lambda y.(\lambda x.y(\lambda y.x)x)(\lambda y.x(\lambda x.yx)y)$

Soluzione

Esercizio (5)

- (a) Si mostri la valutazione di $\lambda x. \lambda y. (\lambda x. y(\lambda y. x)x)(\lambda y. x(\lambda x. yx)y)$.
- (b) Nell'ipotesi di aver usato α -red nella valutazione fornita se ne giustifico l'uso.

Soluzione

Esercizio (5bis)

Si mostri la valutazione di $(\lambda y.(\lambda x.\lambda z.zx)(\lambda x.yzx))(\lambda x.xx)(\lambda x.\lambda y.y)$.

Soluzione

Esercizio (6)

Si mostri la valutazione di $\lambda x.(\lambda y.\lambda x.x y)(\lambda y.y x)y$.

Soluzione

Esercizio (7)

Si dimostri che: $\forall F, \Psi F = F(\Psi F)$

Soluzione

Esercizio (7bis)

Si supponga di estendere il lambda calcolo con assiomi per eq, prod e minus tali che:

$\forall n, m \in \text{Naturali},$
 $\text{eq}[n][m] \rightarrow_e \text{true}, \text{ iff } n = m$
 $\text{eq}[n][m] \rightarrow_e \text{false}, \text{ iff not}(n = m)$
 $\text{prod}[n][m] \rightarrow_e [n * m]$
 $\text{minus}[n][m] \rightarrow_e [n - m], \text{ iff } n > m$

dove: true, false, [n] sono λ -termini visti a lezione e =, *, -, not, > sono le usuali operazioni aritmetiche o logiche.

Si mostrino le riduzioni ($\rightarrow_\alpha, \rightarrow_\beta, \rightarrow_\eta, \rightarrow_e/\text{true}/\text{false}/\text{if}/\Psi$) ottenute per il termine:

$\Psi(F)[3],$

dove F sia il λ -termine $F \equiv \lambda \text{ fact}.\lambda x.\text{if } (\text{eq } x [0]) [1] (\text{prod } x (\text{fact } (\text{minus } x [1])))$.

Soluzione

$\Psi(F)[3] \rightarrow_\psi F(\Psi(F))[3]$
 $\rightarrow_\beta (\lambda x.\text{if } (\text{eq } [x] [0]) [1] (\text{prod } x (\Psi(F) (\text{minus } [x] [1]))))[3]$
 $\rightarrow_\beta \text{if } (\text{eq } [3] [0]) [1] (\text{prod } [3] (\Psi(F) (\text{minus } [3] [1])))$
 $\rightarrow_e \text{if } \text{false } [1] (\text{prod } [3] (\Psi(F) (\text{minus } [3] [1])))$
 $\rightarrow_{\text{if}} \text{false } [1] (\text{prod } [3] (\Psi(F) (\text{minus } [3] [1])))$
 $\rightarrow_{\text{false}} \text{prod } [3] (\Psi(F) (\text{minus } [3] [1]))$
 $\rightarrow_e \text{prod } [3] (\Psi(F) [2])$
 $\rightarrow_\psi \text{prod } [3] (F(\Psi(F)) [2])$
 \dots
 $\rightarrow_\psi \text{prod } [3] (\text{prod } [2] (F(\Psi(F)) [1]))$
 \dots
 $\rightarrow_\psi \text{prod } [3] (\text{prod } [2] (\text{prod } [1] (F(\Psi(F)) [0])))$
 $\rightarrow_\beta \dots$
 $\rightarrow_\beta \text{prod } [3] (\text{prod } [2] (\text{prod } [1] (\text{if } (\text{eq } [0] [0]) [1] (\text{prod } [0] (\Psi(F) (\text{minus } [0] [1])))))$
 $\rightarrow_{\text{if}} \text{prod } [3] (\text{prod } [2] (\text{prod } [1] (\text{true } [1] (\text{prod } [0] (\Psi(F) (\text{minus } [0] [1])))))$
 $\rightarrow_{\text{true}} \text{prod } [3] (\text{prod } [2] (\text{prod } [1] [1]))$

Esercizio (8)

- (a) Si scriva, in Lambda-Calcolo, un programma per la funzione `plus` introdotta nell'aritmetica data per tale linguaggio.
- (b) Si mostri la computazione di `plus[2][1]`

Soluzione

Esercizio (9)

Si scriva, in Lambda-Calcolo, un programma per la funzione `zero?` che calcola il test su zero nell'aritmetica data per tale linguaggio.

Soluzione

Esercizio (10)

Si dia una semantica SOS per la Logica Combinatoria

Soluzione

Esercizio

Si dimostri che $SKK = I$

Soluzione

Esercizio

Si scriva, in Logica Combinatoria, un programma per la funzione plus introdotta nell'aritmetica data per tale linguaggio.

Soluzione

Esercizio

Si scriva, in Logica Combinatoria, un programma per la funzione `minus` introdotta nell'aritmetica data per tale linguaggio.

Soluzione

Esercizio

In π -Calcolo, il termine $P_1 + \dots + P_n$ equivale ad ogni termine corrispondente ad un albero binario con nodi interni $+$ e frontiera ogni permutazione di P_1, \dots, P_n . Si mostri il significato dell'affermazione, discutendo i seguenti punti:

- 1) Fornire una definizione della corrispondenza π -termine/albero binario, richiamata nell'affermazione;
- 2) Indicare quali proprietà del π -Calcolo giustificano tale affermazione;
- 3) Esprimere il numero di tali, diversi, alberi binari;
- 4) Dire se, e quali, altri operatori del π -Calcolo mostrano analoga proprietà.

Soluzione