# Esercizi L5 (Modelli di Calcolo) 15/3 - 20/3 2018

Sommario: 15 marzo, 2018

1 (a) Si fornisca una grammatica per la sintassi astratta del $\lambda-$Calcolo in accordo alla notazione utilizzata nell'albero astratto $[\lambda - ([x], [\lambda - ([y], [@ - ([x], [y])])])]$.
(b) Si mostri poi, che tale albero è ottenuto dalla grammatica data.

2 (a) Si fornisca una grammatica per la sintassi concreta del $\lambda-$Calcolo in accordo alle proprietà date per associatività e precedenza tra operatori.
(b) Si mostri poi, la sintassi concreta dell'albero astratto
$[\lambda - ([x], [\lambda - ([y], [@ - ([x], [y])])])]$.
(c) Si mostri, infine il parse tree del termine ottenuto al punto (b) precedente.

3 Si completino i calcoli indicati con '...' nelle slides precedenti.

4 Si mostri la sequenza di $\alpha-\mathtt{red}$ applicate per ridurre il termine dato ad un termine contenente sempre, identificatori diversi per variabili diverse:
$\lambda\,\mathtt{x}.\lambda\,\mathtt{y}.(\lambda\,\mathtt{x}.\mathtt{y}(\lambda\,\mathtt{y}.\mathtt{x})\mathtt{x})(\lambda\,\mathtt{y}.\mathtt{x}(\lambda\,\mathtt{x}.\mathtt{yx})\mathtt{y})$

5 (a) Si mostri la valutazione di $\lambda\,\mathtt{x}.\lambda\,\mathtt{y}.(\lambda\,\mathtt{x}.\mathtt{y}(\lambda\,\mathtt{y}.\mathtt{x})\mathtt{x})(\lambda\,\mathtt{y}.\mathtt{x}(\lambda\,\mathtt{x}.\mathtt{yx})\mathtt{y})$.
(b) Nell'ipotesi di aver usato $\alpha-\mathtt{red}$ nella valutazione fornita se ne giustifico l'uso.

5bis Si mostri la valutazione di $(\lambda\,\mathtt{y}.(\lambda\,\mathtt{x}.\lambda\,\mathtt{z}.\mathtt{zx})(\lambda\,\mathtt{x}.\mathtt{yzx}))(\lambda\,\mathtt{x}.\mathtt{xx})(\lambda\,\mathtt{x}.\lambda\,\mathtt{y}.\mathtt{y})$.

6 Si mostri la valutazione di $\lambda\,\mathtt{x}.(\lambda\,\mathtt{y}.\lambda\,\mathtt{x}.\mathtt{x}\,\mathtt{y})(\lambda\,\mathtt{y}.\mathtt{y}\,\mathtt{x}))\mathtt{y}$.

7 Si dimostri che: $\forall \mathtt{F}, \quad \Psi\,\mathtt{F} = \mathtt{F}(\Psi\,\mathtt{F})$

7bis Si mostrino le riduzioni $(\rightarrow_\alpha, \rightarrow_\beta, \rightarrow_\eta, \rightarrow_{e/true/false/if/\Psi})$ ottenute per il termine $\Psi(\mathtt{F})[3]$, dove $\mathtt{F}$ sia il $\lambda$-termine per il funzionale fattoriale.

8 (a) Si scriva, in Lambda-Calcolo, un programma per la funzione `plus` introdotta nell'aritmetica data per tale linguaggio.

# Esercizi L5 (Modelli di Calcolo) 15/3 - 20/3 2018 /2

Sommario: 15 marzo, 2018

9. Si scriva, in Lambda-Calcolo, un programma per la funzione `zerop` che calcola `true` quando applicata a `[0]`, `false` altrimenti. (b) Si mostri la computazione di `zero`[2].
10. Si scriva, in Lambda-Calcolo, un programma per la funzione predecessore `pred` che calcoli il predecessore di naturali nell'aritmetica data per il linguaggio. (b) Si mostri la computazione di `pred`[2].
11. Si scriva, in Lambda-Calcolo, un programma per la funzione eq che calcola l'uguaglianza nell'aritmetica data per il linguaggio `false` (allo scopo si faccia uso anche dell'operazione `pred`, discussa in esercizio L5.10. (b) Si mostri la computazione di eq[2][1].
12. Si dia una semantica SOS per la Logica Combinatoria
13. Si dimostri che `S K K = I`
14. Si scriva, in Logica Combinatoria, un programma per la funzione `plus` introdotta nell'aritmetica data per tale linguaggio.
15. In $\pi$-Calcolo, il termine $\mathtt{P}_1 + ... + \mathtt{P}_\mathtt{n}$ equivale ad ogni termine corrispondente ad un albero binario con nodi interni + e frontiera ogni permutazione di $\mathtt{P}_1, ..., \mathtt{P}_\mathtt{n}$. Si mostri il significato dell'affermazione, discutendo i seguenti punti:
    1) Fornire una definizione della corrispondenza $\pi$-termine/albero binario;
    3) Esprimere il numero di tali, diversi, alberi binari;
    4) Dire se, e quali, altri operatori del $\pi$-Calcolo mostrano analoga proprietà.

# Esercizi.

**Esercizio (1)**

*(a) Si fornisca una grammatica per la sintassi astratta del* $\lambda-$*Calcolo in accordo alla notazione utilizzata nell'albero astratto* $[\lambda - ([\mathrm{x}], [\lambda - ([\mathrm{y}], [@ - ([\mathrm{x}], [\mathrm{y}])])])]$.
*(b) Si mostri poi, che tale albero è ottenuto dalla grammatica data.*

**Soluzione**

# Esercizi.

## Esercizio (2)

*(a) Si fornisca una grammatica per la sintassi concreta del $\lambda-$Calcolo in accordo alle proprietà date per associatività e precedenza tra operatori.*
*(b) Si mostri poi, la sintassi concreta dell'albero astratto* $[\lambda - ([x], [\lambda - ([y], [@ - ([x], [y])])])]$.
*(c) Si mostri, infine il parse tree del termine ottenuto al punto (b) precedente.*

**Soluzione**

# Esercizi.

**Esercizio (3)**

*Si completino i calcoli indicati con '...' nelle slides precedenti.*

**Soluzione**

# Esercizi.

**Esercizio (4)**

*Si mostri la sequenza di* $\alpha - \texttt{red}$ *applicate per ridurre il termine dato ad un termine contenente sempre, identificatori diversi per variabili diverse:* $\lambda\, \mathtt{x}.\lambda\, \mathtt{y}.(\lambda\, \mathtt{x}.\mathtt{y}(\lambda\, \mathtt{y}.\mathtt{x})\mathtt{x})(\lambda\, \mathtt{y}.\mathtt{x}(\lambda\, \mathtt{x}.\mathtt{yx})\mathtt{y})$

**Soluzione**

# Esercizi.

**Esercizio (5)**

*(a) Si mostri la valutazione di* $\lambda\,\mathtt{x}.\lambda\,\mathtt{y}.(\lambda\,\mathtt{x}.\mathtt{y}(\lambda\,\mathtt{y}.\mathtt{x})\mathtt{x})(\lambda\,\mathtt{y}.\mathtt{x}(\lambda\,\mathtt{x}.\mathtt{yx})\mathtt{y})$.
*(b) Nell'ipotesi di aver usato* $\alpha - \mathtt{red}$ *nella valutazione fornita se ne giustifico l'uso.*

**Soluzione**

# Esercizi.

**Esercizio (5bis)**

*Si mostri la valutazione di* $(\lambda\, y.(\lambda\, x.\lambda\, z.zx)(\lambda\, x.yzx))(\lambda\, x.xx)(\lambda\, x.\lambda\, y.y)$.

**Soluzione**

$\rightarrow_{\eta} (\lambda y.(\lambda x.\lambda z.zx)(yz))(\lambda x.xx)(\lambda x.\lambda y.y)$

$\rightarrow_{\alpha(w)} (\lambda y.(\lambda x.\lambda w.wx)(yz))(\lambda x.xx)(\lambda x.\lambda y.y)$

$\rightarrow_{\beta} (\lambda y.\lambda w.w(yz))(\lambda x.xx)(\lambda x.\lambda y.y)$

$\rightarrow_{\beta} (\lambda w.w((\lambda x.xx)z))(\lambda x.\lambda y.y)$

$\rightarrow_{\beta} (\lambda x.\lambda y.y)((\lambda x.xx)z)$

$\rightarrow_{\beta} \lambda y.y$

# Esercizi.

**Esercizio (6)**

*Si mostri la valutazione di* $\lambda\,\mathtt{x}.(\lambda\,\mathtt{y}.\lambda\,\mathtt{x}.\mathtt{x}\,\mathtt{y})(\lambda\,\mathtt{y}.\mathtt{y}\,\mathtt{x}))\mathtt{y}$.

**Soluzione**

# Esercizi.

**Esercizio (7)**

*Si dimostri che:* $\forall \mathtt{F},\quad \Psi\,\mathtt{F} = \mathtt{F}(\Psi\,\mathtt{F})$

**Soluzione** $\forall F, \forall d.$

$$YF\,d = F(YF)\,d$$

$$Y = (\lambda g.(\lambda x.g(xx))(\lambda x.g(xx)))F$$

$$YF \to_\beta (\lambda x.F(xx))(\lambda x.F(xx))$$

$$YF\,d \to (\lambda x.F(xx))(\lambda x.F(xx))\,d$$

$$\to F((\lambda x.F(xx))(\lambda x.F(xx)))\,d$$

$$= F(YF)\,d$$

# Esercizi.

## Esercizio (7bis)

*Si supponga di estendere il lambda calcolo con assiomi per eq, prod e minus tali che:*
$\forall \mathtt{n}, \mathtt{m} \in \mathtt{Naturali},$

$\quad \mathtt{eq[n][m]} \rightarrow_{\mathtt{e}} \mathtt{true},\ \mathtt{iff}\ \mathtt{n} = \mathtt{m}$
$\quad \mathtt{eq[n][m]} \rightarrow_{\mathtt{e}} \mathtt{false},\ \mathtt{iff}\ \mathtt{not}(\mathtt{n} = \mathtt{m})$
$\quad \mathtt{prod[n][m]} \rightarrow_{\mathtt{e}} [\mathtt{n} * \mathtt{m}]$
$\quad \mathtt{minus[n][m]} \rightarrow_{\mathtt{e}} [\mathtt{n} - \mathtt{m}],\ \mathtt{iff}\ \mathtt{n} > \mathtt{m}$

*dove:* $\mathtt{true}, \mathtt{false}, [\mathtt{n}]$ *sono* $\lambda$*-termini visti a lezione e* $=, *, -, \mathtt{not}, >$ *sono le usuali operazioni aritmetiche o logiche.*
*Si mostrino le riduzioni* $(\rightarrow_{\alpha}, \rightarrow_{\beta}, \rightarrow_{\eta}, \rightarrow_{e/true/false/if/\Psi})$ *ottenute per il termine:*

$$\Psi(\mathtt{F})[3],$$

*dove* $\mathtt{F}$ *sia il* $\lambda$*-termine:*
$\mathtt{F} \equiv \cancel{\Psi(}\lambda\, \mathtt{fact}.\lambda\, \mathtt{x.if\ (eq\ x\ [0])\ [1]\ (prod\ x\ (fact\ (minus\ x\ [1])))}\cancel{)}$

**Soluzione**

$$
\begin{aligned}
\Psi(\mathtt{F})[3] &\rightarrow_{\psi} \mathtt{F}(\Psi(\mathtt{F}))[3] \\
&\rightarrow_{\beta} (\lambda\, \mathtt{x.if\ (eq\ [x]\ [0])\ [1]\ (prod\ x\ (}\Psi(\mathtt{F})\ \mathtt{(minus\ [x]\ [1]))))}[3] \\
&\rightarrow_{\beta} \mathtt{if\ (eq\ [3]\ [0])\ [1]\ (prod\ [3]\ (}\Psi(\mathtt{F})\ \mathtt{(minus\ [3]\ [1])))} \\
&\rightarrow_{e} \mathtt{if\ false\ [1]\ (prod\ [3]\ (}\Psi(\mathtt{F})\ \mathtt{(minus\ [3]\ [1])))} \\
&\rightarrow_{if} \mathtt{false\ [1]\ (prod\ [3]\ (}\Psi(\mathtt{F})\ \mathtt{(minus\ [3]\ [1])))} \\
&\rightarrow_{false} \mathtt{prod\ [3]\ (}\Psi(\mathtt{F})\ \mathtt{(minus\ [3]\ [1]))} \\
&\rightarrow_{e} \mathtt{prod\ [3]\ (}\Psi(\mathtt{F})\ \mathtt{[2])} \\
&\rightarrow_{\psi} \mathtt{prod\ [3]\ (F(}\Psi(\mathtt{F}))\ \mathtt{[2])} \\
&\ldots \\
&\rightarrow_{\psi} \mathtt{prod\ [3]\ (prod\ [2]\ (F(}\Psi(\mathtt{F}))\ \mathtt{[1]))} \\
&\ldots \\
&\rightarrow_{\psi} \mathtt{prod\ [3]\ (prod\ [2]\ (prod\ [1]\ (F(}\Psi(\mathtt{F}))\ \mathtt{[0])))} \\
&\rightarrow_{\beta} \ldots \\
&\rightarrow_{\beta} \mathtt{prod\ [3]\ (prod\ [2]\ (prod\ [1]\ (if\ (eq\ [0]\ [0])\ [1]\ (prod\ [0]\ (}\Psi(\mathtt{F})\ \mathtt{(minus\ [0]\ [1])))))} \\
&\rightarrow_{if} \mathtt{prod\ [3]\ (prod\ [2]\ (prod\ [1]\ (true\ [1]\ (prod\ [0]\ (}\Psi(\mathtt{F})\ \mathtt{(minus\ [0]\ [1])))))} \\
&\rightarrow_{true} \mathtt{prod\ [3]\ (prod\ [2]\ (prod\ [1]\ [1]))}
\end{aligned}
$$

# Esercizi.

**Esercizio (8)**

*(a) Si scriva, in Lambda-Calcolo, un programma per la funzione* `plus` *introdotta nell'aritmetica data per tale linguaggio.*
*(b) Si mostri la computazione di* `plus`[2][1]

**Soluzione**

# Esercizi.

**Esercizio (9)**

*Si scriva, in Lambda-Calcolo, un programma per la funzione* `zerop` *che calcola il test su zero nell'aritmetica data per tale linguaggio.*

**Soluzione**

# Esercizi.

**Esercizio (10)**

*Si dia una semantica SOS per la Logica Combinatoria*

**Soluzione**

# Esercizi.

**Esercizio**

*Si dimostri che* `S K K = I`

**Soluzione**



Marco Bellia, Dip. Informatica, Università di Pisa

# Esercizi.

**Esercizio**

*Si scriva, in Logica Combinatoria, un programma per la funzione* `plus` *introdotta nell'aritmetica data per tale linguaggio.*

**Soluzione**

# Esercizi.

**Esercizio**

*Si scriva, in Logica Combinatoria, un programma per la funzione* `minus` *introdotta nell'aritmetica data per tale linguaggio.*

**Soluzione**

# Esercizi.

**Esercizio**

*In $\pi$-Calcolo, il termine $\mathtt{P_1} + \ldots + \mathtt{P_n}$ equivale ad ogni termine corrispondente ad un albero binario con nodi interni + e frontiera ogni permutazione di $\mathtt{P_1}, \ldots, \mathtt{P_n}$. Si mostri il significato dell'affermazione, discutendo i seguenti punti:*
*1) Fornire una definizione della corrispondenza $\pi$-termine/albero binario, richiamata nell'affermazione;*
*2) Indicare quali proprietà del $\pi$-Calcolo giustificano tale affermazione;*
*3) Esprimere il numero di tali, diversi, alberi binari;*
*4) Dire se, e quali, altri operatori del $\pi$-Calcolo mostrano analoga proprietà.*

**Soluzione**