Sommario: 27/2-2/3, 2018

1 Scrivere un programma C che legga una arbitraria sequenza di valori ordinabili, la ordini, implementando l'algoritmo di QuickSort e infine, stampi la sequenza ordinata. Allo scopo, si completi il testo esponendo eventuali vincoli che si ritenga utile assumere.

2 Se e dove, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo che $\mathcal{F}$ è numerabile.

√3 (a) Se e dove, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo che la funzione $[|\_|]$ è calcolabile?
(b) E nel caso, quale funzione calcola?

4 Se e dove, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo che $\mathcal{P}$ contiene un programma che calcola $[|\_|]$.

5 Se e quale relazione, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo tra l'iniettiva $^{-} : \mathcal{P} \to \mathcal{D}$ e la suriettiva $[|\_|]$.

6 Se e dove, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo che per ogni funzione calcolabile c'è un programma che la calcola.

7 Se e dove, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo che ogni linguaggio di programmazione definisce tutte e solo le funzioni calcolabili.

8 Se e dove, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo che $[|\_|]$ stabilisce una corrispondenza uno-uno tra $\mathcal{P}$ e $\mathcal{F}$.

Sommario: 27/2-2/3, 2018

✓9 Facendo riferimento all'esercizio 1 sopra. Si commenti la funzione calcolata dal programma fornito come soluzione, in particolare si dica: Quali sono i valori del numerabile $\mathcal{D}$? Cosa sono le sequenze rispetto a tali valori? Cos'è in $\mathcal{F}$ un ordinamento di tali sequenze?

10 In un esempio dei lucidi di Lezione1 abbiamo usato il termine stream ad indicare una struttura dati in grado di fornire un'illimitata sequenza di valori. Come potrebbe essere definita una tale struttura in termini di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{D}$?

11 Sia $\mathtt{u} \in \mathcal{L}$ un programma che calcola la funzione $[|\_|]$ (vedi anche esercizio L1.4). Si dica cosa calcola $\mathcal{U}(\overline{\mathtt{u}})$.

12 Con riferimento alla formulazione $\mathcal{F}$. Sia $\mathcal{U}_\mathcal{P} \equiv \{\mathrm{p} \in \mathcal{P} \mid [|\mathrm{p}|] = \mathcal{U}\}$. Si discuta la cardinalità di $\mathcal{U}_\mathcal{P}$.

Esercizio (1)

Scrivere un programma C che legga una arbitraria sequenza di valori ordinabili, la ordini, implementando l'algoritmo di QuickSort e infine, stampi la sequenza ordinata. Allo scopo, si completi il testo esponendo eventuali vincoli che si ritenga utile assumere.

Soluzione: Requisiti aggiuntivi

```
/*
Esercizo 1-24/2/2016.
Scrivere un programma C che calcoli la funzione "ordinamento di sequenza" implementando l'algoritmo
QuickSort. Allo scopo, si completi il testo con fgli eventuali vincoli che si ritengano necessari.
**
* Marco Bellia
**
Soluzione.
Vincoli.
1) Esistenza bound alla dimensione della sequenza da ordinare. Il bound è trattato come:
       Parametro di Programma
2) Elementi della sequenza di tipo noto. Il tipo è int.
3) Sequenza realizzata come struttura ad accesso diretto: array (ad allocazion) statica.
*/
```

Esercizi L1 -27/2/2018 - Esercizio 1 - cont'd

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int N = 15; // Parametro di programma (non modificabile)
void QuickSort(int Left, int Right, int A[]){// procedura ricorsiva
    int I=Left;  //indici in [Left..Right]
    int J=Right; //indici in [Left..Right]
    int temp=A[(Left+Right)/2];
    while (I<=J) {
        while (A[I]<temp) I++;
        while (A[J]>temp) J--;
        if (I<=J){
            int scambia=A[I];
            A[I]=A[J];
            A[J]=scambia;
            I++; J--;
        }
    }
    if (Left<J) QuickSort(Left,J,A);
    if (I<Right) QuickSort(I,Right,A);
}

int main(void){
    // Allocaione Sequenza da ordinare
    int Seq[N];
    int k;
    //lettura sequenza k<=N interi da ordinare;
    int i=0;
    while (i<N && scanf("%d",&Seq[i])==1) i++;
    k=i-1;
     //ordinamento QuickSort
    QuickSort(0,k,Seq);
    //stampa sequenza ordinata;
    for (int i=0; i<k; i++) printf("%d,",Seq[i]);
    printf("%d\n",Seq[k]);
    return(1);
}
```

Esercizi L1 -27/2/2018

Esercizio (2)

Se e dove, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo che $\mathcal{F}$ è numerabile.

- $\mathcal{F} \equiv [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$ *with* $\mathcal{D} \cong [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$
  - *(Universale)* $\exists\, \mathcal{U} \in \mathcal{F}$,
  - *(Meaning)* $\exists\, [|\_|] : \mathcal{P} \to \mathcal{F}$, *suriettiva,*
  - $\forall \mathrm{p} \in \mathcal{P}$,
    $\mathcal{U}(\overline{\mathrm{p}}) = \mathrm{g} \in (\mathcal{D} \cong [\mathcal{D} \to \mathcal{D}] \equiv)\ \mathcal{F}$
  - $\forall \mathrm{g} \in \mathcal{F}$, *sia* $\mathrm{g} = [|\mathrm{p}|]$, *per qualche* p$\in \mathcal{P}$
    $\mathcal{U}(\overline{\mathrm{p}})(\mathrm{x}) = \mathrm{g}(\mathrm{x}) \quad \forall \mathrm{x} \in \mathcal{D}$

With $\mathcal{D}$ *numerabile,* $\mathcal{L}$ $\in$**LP**, $\mathcal{P}$ *insieme programmi di* $\mathcal{L}$, $^{-} : \mathcal{P} \to \mathcal{D}$, *iniettiva.*

Soluzione
Immediato da:
-assunzione: $\mathcal{D}$ *numerabile*
-proprietà Isomorfismo: $\mathcal{D} \cong ([\mathcal{D} \to \mathcal{D}] \equiv)\mathcal{F}$
per transitività: $\mathcal{F}$ ha cardinalità numerabile.

Esercizio (3)

(a) *Se e dove, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo che la funzione* $[|\_|]$ *è calcolabile?*
(b) *E nel caso, quale funzione calcola?*

- $\mathcal{F} \equiv [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$ *with* $\mathcal{D} \cong [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$
  - *(Universale)* $\exists\, \mathcal{U} \in \mathcal{F}$,
  - *(Meaning)* $\exists\, [|\_|] : \mathcal{P} \to \mathcal{F}$, *suriettiva,*
  - $\forall \mathtt{p} \in \mathcal{P}$,
    $\mathcal{U}(\overline{\mathtt{p}}) = \mathtt{g} \in (\mathcal{D} \cong [\mathcal{D} \to \mathcal{D}] \equiv)\ \mathcal{F}$
  - $\forall \mathtt{g} \in \mathcal{F}$, *sia* $\mathtt{g} = [|\mathtt{p}|]$, *per qualche* $\mathtt{p} \in \mathcal{P}$
    $\mathcal{U}(\overline{\mathtt{p}})(\mathtt{x}) = \mathtt{g}(\mathtt{x}) \quad \forall \mathtt{x} \in \mathcal{D}$

With $\mathcal{D}$ *numerabile,* $\mathcal{L} \in$**LP**, $\mathcal{P}$ *insieme programmi di* $\mathcal{L}$, $^{-} : \mathcal{P} \to \mathcal{D}$, *iniettiva.*

Soluzione (a)
Non lo vediamo. Infatti, Meaning $[|\_|]$ che soddisfano la formulazione $\mathcal{F}$ non sono unici. Sia $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$ l'insieme di tali mapping per $\mathcal{L}$. Mostriamo che $\mathcal{H}_{\mathcal{L}} \cap \mathcal{F} \neq \{\}$. Sia $\mathtt{h}$ tale che:

$$\forall \mathtt{p} \in \mathcal{P}, \quad \mathtt{H}(\mathtt{p}) = \mathcal{U}(\overline{\mathtt{p}}).$$

Allora osserviamo che:
(1) $\mathtt{H} \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}}$. Infatti soddisfa tutte le condizioni su $[|\_|]$.
(2) $\mathtt{H}$ è in $\mathcal{F}$ quando $^{-} \circ\, \mathcal{U} \in \mathcal{F}$,
ovvero, quando $^{-} : \mathcal{P} \to \mathcal{D} \in \mathcal{F}$ [1]
(3) Anche per $^{-}$ possiamo trovare $^{-} \in \mathcal{F}$, sebbene non tutte le iniettive $^{-}$ lo siano.

Soluzione (b)
La funzione $\mathtt{H} \in \mathcal{F}$, calcola la Funzione $^{-} \circ\, \mathcal{U} \in \mathcal{F}$

Esercizio (4)

Se e dove, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo che $\mathcal{P}$ contiene un programma che calcola $[|\_|]$.

- $\mathcal{F} \equiv [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$ *with* $\mathcal{D} \cong [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$
  - *(Universale)* $\exists \mathcal{U} \in \mathcal{F}$,
  - *(Meaning)* $\exists [|\_|] : \mathcal{P} \to \mathcal{F}$, *suriettiva,*
  - $\forall \mathrm{p} \in \mathcal{P}$,
    $\mathcal{U}(\overline{\mathrm{p}}) = \mathrm{g} \in (\mathcal{D} \cong [\mathcal{D} \to \mathcal{D}] \equiv)\ \mathcal{F}$
  - $\forall \mathrm{g} \in \mathcal{F}$, *sia* $\mathrm{g} = [|\mathrm{p}|]$, *per qualche* $p \in \mathcal{P}$
    $\mathcal{U}(\overline{\mathrm{p}})(\mathrm{x}) = \mathrm{g}(\mathrm{x}) \quad \forall \mathrm{x} \in \mathcal{D}$

With $\mathcal{D}$ *numerabile,* $\mathcal{L} \in$**LP**, $\mathcal{P}$ *insieme programmi di* $\mathcal{L}$, $\overline{\ }: \mathcal{P} \to \mathcal{D}$, *iniettiva.*

Soluzione
Sia $\mathcal{H}_{\mathcal{L}} \equiv \{[|\_|] \in \mathtt{Suriettiva}_{\mathcal{P}\to\mathcal{F}} \mid (\forall \mathrm{p})\mathcal{U}(\overline{\mathrm{p}}) = [|\mathrm{p}|])\}$
Da: $\mathcal{H}_{\mathcal{L}} \cap \mathcal{F} \neq \{\}$ (vedi esercizio 3). Sia, $\overline{\mathcal{U}} \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}} \cap \mathcal{F}$.
Segue: $\exists \mathtt{sem}_{\mathcal{L}} \in \mathcal{P} : [|\mathtt{sem}_{\mathcal{L}}|] = \overline{\mathcal{U}}$

Esercizi L1 -27/2/2018

Esercizio (5)

Se e quale relazione, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo tra l'iniettiva $^{-} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{D}$ e la suriettiva $[|\_|]$.

- $\mathcal{F} \equiv [\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}]$ *with* $\mathcal{D} \cong [\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}]$
  - *(Universale)* $\exists\, \mathcal{U} \in \mathcal{F}$,
  - *(Meaning)* $\exists\, [|\_|] : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}$, *suriettiva,*
  - $\forall \mathrm{p} \in \mathcal{P}$,
    $\mathcal{U}(\overline{\mathrm{p}}) = \mathrm{g} \in (\mathcal{D} \cong [\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}] \equiv)\ \mathcal{F}$
  - $\forall \mathrm{g} \in \mathcal{F}$, *sia* $\mathrm{g} = [|\mathrm{p}|]$, *per qualche* $\mathrm{p} \in \mathcal{P}$
    $\mathcal{U}(\overline{\mathrm{p}})(\mathrm{x}) = \mathrm{g}(\mathrm{x}) \quad \forall \mathrm{x} \in \mathcal{D}$

With $\mathcal{D}$ *numerabile,* $\mathcal{L}$ $\in$**LP**, $\mathcal{P}$ *insieme programmi di* $\mathcal{L}$, $^{-} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{D}$, *iniettiva.*

Soluzione

La relazione è quella individuata nell'esercizio 3, ovvero: $^{-} \in \mathcal{F}$ sse $[|\_|] \in \mathcal{F}$

In particolare la iniettività $^{-}$ ci dice che due distinti programmi sono trattati sempre come due distinti valori di $\mathcal{D}$ salvo poi avere stessa immagine sotto $\mathcal{U}$ allorchè i due programmi calcolino una stessa funzione $\mathrm{g} \in \mathcal{F}$.
La suriettività di $[|\_|]$ invece, ci dice che per ogni funzione calcolabile esiste un programma del linguaggio $\mathcal{L}$ in grado di definirla e calcolarla (mediante l'esecutore di $\mathcal{L}$)

Esercizio (6)

Se e dove, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo che per ogni funzione calcolabile c'è un programma che la calcola.

- $\mathcal{F} \equiv [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$ *with* $\mathcal{D} \cong [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$
  - *(Universale)* $\exists\, \mathcal{U} \in \mathcal{F}$,
  - *(Meaning)* $\exists\, [|\_|] : \mathcal{P} \to \mathcal{F}$, *suriettiva,*
  - $\forall \mathrm{p} \in \mathcal{P}$,
    $\mathcal{U}(\bar{\mathrm{p}}) = \mathrm{g} \in (\mathcal{D} \cong [\mathcal{D} \to \mathcal{D}] \equiv)\ \mathcal{F}$
  - $\forall \mathrm{g} \in \mathcal{F}$, *sia* $\mathrm{g} = [|\mathrm{p}|]$, *per qualche* p$\in \mathcal{P}$
    $\mathcal{U}(\bar{\mathrm{p}})(\mathrm{x}) = \mathrm{g}(\mathrm{x}) \quad \forall \mathrm{x} \in \mathcal{D}$

With $\mathcal{D}$ *numerabile,* $\mathcal{L} \in$**LP**, $\mathcal{P}$ *insieme programmi di* $\mathcal{L}$, $^{-} : \mathcal{P} \to \mathcal{D}$, *iniettiva.*

Soluzione

La suriettività di $[|\_|]$ da $\mathcal{P}$ su F dice esattamente che "per ogni funzione calcolabile esiste un programma del linguaggio $\mathcal{L}$" in grado di definirla e calcolarla (mediante l'esecutore di $\mathcal{L}$)

Esercizio (7)

Se e dove, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo che ogni un linguaggio di programmazione definisce tutte e solo le funzioni calcolabili.

- $\mathcal{F} \equiv [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$ *with* $\mathcal{D} \cong [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$
  - *(Universale)* $\exists\, \mathcal{U} \in \mathcal{F}$,
  - *(Meaning)* $\exists\, [|\_|] : \mathcal{P} \to \mathcal{F}$, *suriettiva,*
  - $\forall \mathrm{p} \in \mathcal{P}$,
    $\mathcal{U}(\overline{\mathrm{p}}) = \mathrm{g} \in (\mathcal{D} \cong [\mathcal{D} \to \mathcal{D}] \equiv)\ \mathcal{F}$
  - $\forall \mathrm{g} \in \mathcal{F}$, *sia* $\mathrm{g} = [|\mathrm{p}|]$, *per qualche* p$\in \mathcal{P}$
    $\mathcal{U}(\overline{\mathrm{p}})(\mathrm{x}) = \mathrm{g}(\mathrm{x}) \quad \forall \mathrm{x} \in \mathcal{D}$

With $\mathcal{D}$ *numerabile,* $\mathcal{L} \in$**LP**, $\mathcal{P}$ *insieme programmi di* $\mathcal{L}$, $\overline{\ }: \mathcal{P} \to \mathcal{D}$, *iniettiva.*

Soluzione
È affermato in modo specifico dal 3 e 4 punto.
In particolare, il punto 3 (i.e. $\forall \mathrm{p} \in \mathcal{P}$, $\mathcal{U}(\overline{\mathrm{p}}) \in \mathcal{D}$) afferma il **SOLO**: Ogni programma definisce una funzione calcolabile.
Mentre, il successivo punto 4 (i.e. $\forall \mathrm{g} \in \mathcal{F}$, sia $\mathrm{g} = [|\mathrm{p}|]$, per qualche p$\in \mathcal{P}$), ci dice il **TUTTE**: Ogni funzione calcolabile ha un programma che la calcola.

Esercizi L1 -27/2/2018

Esercizio (8)

Se e dove, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo che $[|\_|]$ stabilisce una corrispondenza uno-uno tra $\mathcal{P}$ e $\mathcal{F}$.

- $\mathcal{F} \equiv [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$ *with* $\mathcal{D} \cong [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$
  - *(Universale)* $\exists\, \mathcal{U} \in \mathcal{F}$,
  - *(Meaning)* $\exists\, [|\_|] : \mathcal{P} \to \mathcal{F}$, *suriettiva,*
  - $\forall \mathrm{p} \in \mathcal{P}$,
    $\mathcal{U}(\overline{\mathrm{p}}) = \mathrm{g} \in (\mathcal{D} \cong [\mathcal{D} \to \mathcal{D}] \equiv)\ \mathcal{F}$
  - $\forall \mathrm{g} \in \mathcal{F}$, *sia* $\mathrm{g} = [|\mathrm{p}|]$, *per qualche* $\mathrm{p} \in \mathcal{P}$
    $\mathcal{U}(\overline{\mathrm{p}})(\mathrm{x}) = \mathrm{g}(\mathrm{x}) \quad \forall \mathrm{x} \in \mathcal{D}$

With $\mathcal{D}$ *numerabile,* $\mathcal{L} \in$ **LP**, $\mathcal{P}$ *insieme programmi di* $\mathcal{L}$, $\overline{} : \mathcal{P} \to \mathcal{D}$, *iniettiva.*

Soluzione
In nessuna parte della formulazione possiamo trovare una tale affermazione.
In particolare tale affermazione è FALSA. La corrispondenza $\mathcal{P}$ e $\mathcal{F}$ stabilita da $[|\_|]$ è molti-uno e può essere facilmente dimostrato che (in tutti i linguaggi di programmazione odierni) dato un programma di un linguaggio $\mathcal{L}$ esistono numerabili varianti sintattiche che definiscono programmi di $\mathcal{L}$ equivalenti al programma dato e quindi, aventi stessa immagine sotto $[|\_|]$.

Esercizio (9)

Facendo riferimento all'esercizio 1 sopra. Si commenti la funzione calcolata dal programma fornito come soluzione, in particolare si dica: Quali sono i valori del numerabile $\mathcal{D}$? Cosa sono le sequenze rispetto a tali valori? Cos'è in $\mathcal{F}$ un ordinamento di tali sequenze?

Soluzione

$D \supseteq Z$ (contiene gli interi)

$$Seq = \left\{ g_k \in [D \to D] \;\middle|\; g_k(d) = \begin{cases} d' \in Z & \text{se } d \in N \wedge 0 \le d < k \\ \bot & \text{altrimenti} \end{cases} \right\}$$

$ord : Seq \to Seq \in [D \to D]$

Esercizio (10)

In un esempio dei lucidi di Lezione1 abbiamo usato il termine stream ad indicare una struttura dati in grado di fornire un'illimitata sequenza di valori. Come potrebbe essere definita una tale struttura in termini di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{D}$?

Soluzione

Esercizi L1

Esercizio (11)

Sia $\mathtt{u} \in \mathcal{L}$ *un programma che calcola la funzione* $[|\_|]$ *(vedi anche esercizio L1.4). Si dica cosa calcola* $\mathcal{U}(\bar{\mathtt{u}})$*.*

- $\mathcal{F} \equiv [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$ *with* $\mathcal{D} \cong [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$
  - *(Universale)* $\exists\, \mathcal{U} \in \mathcal{F}$,
  - *(Meaning)* $\exists\, [|\_|] : \mathcal{P} \to \mathcal{F}$, *suriettiva,*
  - $\forall \mathtt{p} \in \mathcal{P}$,
    $\mathcal{U}(\bar{\mathtt{p}}) = \mathtt{g} \in (\mathcal{D} \cong [\mathcal{D} \to \mathcal{D}] \equiv)\ \mathcal{F}$
  - $\forall \mathtt{g} \in \mathcal{F}$, *sia* $\mathtt{g} = [|\mathtt{p}|]$, *per qualche* $\mathtt{p} \in \mathcal{P}$
    $\mathcal{U}(\bar{\mathtt{p}})(\mathtt{x}) = \mathtt{g}(\mathtt{x}) \quad \forall \mathtt{x} \in \mathcal{D}$

With $\mathcal{D}$ *numerabile,* $\mathcal{L} \in$**LP**, $\mathcal{P}$ *insieme programmi di* $\mathcal{L}$, $\bar{\ } : \mathcal{P} \to \mathcal{D}$, *iniettiva.*

Soluzione
Da esercizio 3: $[|\_|]$ calcola $\bar{\ } \circ \mathcal{U} \in \mathcal{F}$
Da esercizio 4: $\exists \mathtt{sem}_{\mathcal{L}} \in \mathcal{P} : [|\mathtt{sem}_{\mathcal{L}}|] = \bar{\ } \circ \mathcal{U} \in \mathcal{F}$
Allora $\mathtt{u}$, $\mathtt{sem}_{\mathcal{L}} \in \mathcal{P}$ sono programmi equivalenti e in accordo al punto 4 della formulazione $\mathcal{F}$, abbiamo:
$\mathcal{U}(\bar{\mathtt{p}})(\mathtt{x}) = \mathtt{g}(\mathtt{x})\ (\forall \mathtt{x} \in \mathcal{D})$ per $\mathtt{g} = [|\mathtt{p}|]$ e $\mathtt{p} \in \mathcal{P}$,
ovvero,
$\mathcal{U}(\bar{\mathtt{u}})(\mathtt{x}) = [|\_|](\mathtt{x})\ (\forall \mathtt{x} \in \mathcal{D})$, per $[|\_|] = [|\mathtt{p}|]$ e $\mathtt{u} \in \mathcal{P}$ quando siano $\mathtt{g} \equiv [|\_|]$ e $\mathtt{p} \equiv \mathtt{u}$.
Quindi, concludiamo: $\mathcal{U}(\bar{\mathtt{u}}) = [|\_|]$

Esercizi L1

Esercizio (12)

Con riferimento alla formulazione $\mathcal{F}$. Sia $\mathcal{U}_{\mathcal{P}} \equiv \{\mathtt{p} \in \mathcal{P} \mid [|\mathtt{p}|] = \mathcal{U}\}$. Si discuta la cardinalità di $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}$.

- $\mathcal{F} \equiv [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$ *with* $\mathcal{D} \cong [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$
  - *(Universale)* $\exists\, \mathcal{U} \in \mathcal{F}$,
  - *(Meaning)* $\exists\, [|\_|] : \mathcal{P} \to \mathcal{F}$, *suriettiva,*
  - $\forall \mathtt{p} \in \mathcal{P}$,
    $\mathcal{U}(\overline{\mathtt{p}}) = \mathtt{g} \in (\mathcal{D} \cong [\mathcal{D} \to \mathcal{D}] \equiv)\ \mathcal{F}$
  - $\forall \mathtt{g} \in \mathcal{F}$, *sia* $\mathtt{g} = [|\mathtt{p}|]$, *per qualche* $p \in \mathcal{P}$
    $\mathcal{U}(\overline{\mathtt{p}})(\mathtt{x}) = \mathtt{g}(\mathtt{x}) \quad \forall \mathtt{x} \in \mathcal{D}$

With $\mathcal{D}$ *numerabile,* $\mathcal{L} \in$ **LP**, $\mathcal{P}$ *insieme programmi di* $\mathcal{L}$, $^{-} : \mathcal{P} \to \mathcal{D}$, *iniettiva.*

Soluzione

Sia $^{-\mathtt{D}}$ la restrizione bijettiva[2] di $^{-}$. Nel seguito useremo $^{-}$ e $^{-1}$ per indicare la sua restrizione bijettiva $^{-\mathtt{D}}$ e la sua inversa $^{-1\mathtt{D}}$, rispettivamente. Sia

$$\mathtt{g}(\mathtt{x}) \equiv [|\overline{\mathtt{x}}^{1}|]\ (\forall \mathtt{x} \in \mathtt{D}), \text{ e } \mathtt{g}(\mathtt{x}) \equiv \omega\ (\forall \mathtt{x} \in \mathcal{D} - \mathtt{D}).^{3}$$

Osserviamo che:

(1) g è una funzione universale per $\mathcal{L}$.

(2) Se $^{-}$ e $^{-1}$ sono calcolabili, allora lo sono anche, la composizione $^{-1} \circ [|\_|] \equiv [|\overline{x}^{1}|]$ e la funzione parziale g.

....

Esercizio (12 - cont'd)

Con riferimento alla formulazione $\mathcal{F}$. Sia $\mathcal{U}_{\mathcal{P}} \equiv \{\mathtt{p} \in \mathcal{P} \mid [|\mathtt{p}|] = \mathcal{U}\}$. Si discuta la cardinalità di $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}$.

Soluzione - cont'd
(3) Ogni coppia di calcolabili $(^{-}, ^{-1})$, fornisce una diversa rappresentazione dei programmi sul dominio $\mathcal{D}$ e una corrispondente funzione g di interpretazione/compilazione/valutazione/esecuzione per i programmi di $\mathcal{L}$.
(4) Sia $\mathcal{B}$ l'insieme di tutte le coppie calcolabili come in (3). Allora, $\mathcal{B}$ ha cardinabilità numerabile [4]. Allora, è numerabile anche l'insieme $\mathcal{G} \equiv \{\mathtt{g}(\mathtt{x}) \equiv [|\overline{\mathtt{x}}^{1}|]\ (\forall \mathtt{x} \in \mathtt{D}) \mid (^{-}, ^{-1}) \in \mathcal{B}\}$ delle diverse calcolabili g. Infine, $\mathcal{G} \subset \mathcal{U}_{\mathcal{P}}$, quindi anche $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}$ è numerabile.

[4] data una coppia calcolabile, per permutazione delle immagini calcolate otteniamo numerabili nuove coppie, tutte calcolabili