

Sommario: 4 aprile, 2018

- Dati, Tipi di Dato e Tipi
- Tipi: Principi e Usi
- Sistemi di Tipi e Type Safety
- Equivalenza, Coercion and Cast
- Polimorfismo: Ad Hoc, Generico e di Sottotipo
- Studio di Casi: Tipi in C e il costrutto Union
- Studio di Casi: Tipi algebrici (o concreti) in OCaml
- Esercizi

Dati, Tipi di Dato, Tipi: Dato

- **Dato:** La più semplice struttura **per introdurre valori** in un programma
- **Caratteristiche Distintive** sono i modi con cui possono essere usato nei programmi
 - Valori calcolabili: Espresi da espressione non atomica (i.e. variabile o literal);
 - Denotable values: Denotazioni in ambiente (in generale, dichiarazioni);
 - Storable values: (in genere) Valori di un modificabile;
 - Literal values: Espresi con literals.
- Ogni Linguaggio definisce quali modi sono usabili per i dati

Example

```
int A[] = {2, 7, 12, 9};/ * corretto in C * /  
intSeq QSort(intSeq cc, int ord(int x, int y)){...};/ * errore in C * /  
A = {2, 7, 12, 9};/ * errore in C * /
```

- {2,7,12,9} esprime in C, un valore array solo nella dichiarazione
- una funzione in C è solo un valore denotabile: non può essere trasmessa, nè restituita, nè assegnata come valore memorizzabile

Dati, Tipi di Dato, Tipi: Tipi di Dato

- **Tipi di Dato: Collezioni di valori omogenei** rispetto alle operazioni che possono essere loro applicate, nei programmi
 - **Caratteristiche Distintive** sono le operazioni applicabili
 - Una grande varietà. Si suddividono in:
 - **Scalari:** Sono valori atomici
Esempi: *Interi, Virgola mobile, Complessi, Caratteri, Boolean, Enumerato, Intervallo, Void, Puntatore, ...*
 - **Strutturati:** Sono valori composti con operazioni per la selezione dei componenti
Esempi: *Record, Array, Stringhe, Set, List, Collections, ...*
 - **Statici:** Sono allocati staticamente, alla dichiarazione/introduzione
 - **Dinamici:** Sono allocati dinamicamente mediante espressioni che ne estendono o riducono la struttura dei componenti
 - **Ricorsivi:** Sono tipi definiti in modo induttivo richiedono uno specifico meccanismo. Emulato in C mediante puntatori
Esempi. `Type intList = Null | Cons int intList`
 - **Memorizzabili, Modificabili o no:** Il linguaggio stabilisce
 - Per gli scalari, quali siano, oppure no, assegnabili a variabili (ovvero quali siano memorizzabili)
 - Per gli strutturati, quali abbiano componenti modificabili.

Dati, Tipi di Dato, Tipi: Tipi

- **Tipi: Strutture per classificare in modo univoco** il "ruolo" di ogni struttura usata in un programma con vari effetti e scopi:
 - **Evidenziare** l'organizzazione concettuale del programma
Esempi. La presenza nel programma (a top-level¹) di tipi per dati e operazioni che rispecchiano l'organizzazione dei valori e delle trasformazioni operate dal problema da meccanizzare. Ad esempio: Il programma deriva introduce il tipo `parseTree`.
 - **Supportare il controllo** dell'allocazione di memoria dei dati
Esempi. È il caso della funzione `malloc` in C e `new` in altri linguaggi, che usano i tipi per calcolare l'ammontare di memoria dinamica da allocare. Analogamente, il compilatore guarda ai tipi, nelle dichiarazioni, per la memoria statica.
 - **Verificare** proprietà statiche del programma
 - **Type Safety** ovvero Verifica contro stati di "stuck"

¹ ma per i principi della Programmazione Strutturata, ciò si ripete ad ogni livello con i sotto-problemi

- Tipi: **Strutture per classificare in modo univoco** il "ruolo" di ogni struttura usata in un programma con vari effetti e scopi:
 - **Evidenziare** l'organizzazione concettuale del programma
 - **Supportare il controllo** dell'allocazione di memoria dei dati
 - **Verificare** proprietà statiche del programma
Esempi. È il caso della corrispondenza tra le entità definite e il loro uso nel programma, quali variabili assegnate e valore assegnabile, funzione dichiarata e sue invocazioni, struttura di un valore usato e operazioni applicate ad esso, ...
 - **Type Safety** ovvero Verifica contro stati di "stuck". Uno stato di "stuck" è uno stato che nessuna corretta esecuzione del programma dovrebbe raggiungere².
Esempi. È il caso del seguente programma C.

²Uno stato di "stuck" non è uno stato con anomalie quali eccezioni di programma o sistema di varia origine. Tali stati sono invece da considerarsi legali e raggiungibili anche da computazioni corrette.

- **Type Safety** ovvero Verifica contro stati di "stuck". Uno stato di "stuck" è uno stato che nessuna corretta esecuzione del programma dovrebbe raggiungere³. Esempi. È il caso del seguente programma C.

Example

```
int main (int argc, char * argv[]){ //cosa calcola?  
    int x = 10;  
    char a = 'e';  
    printf("Totale da pagare in euro : %2d\n", x + a);  
    return 0;  
}
```

The program terminates computing :
Totale da pagare in euro : 111

- Dovrebbe essere evidente che il programmatore ha commesso un errore
- Nondimeno, questa è la peggiore situazione che può capitare nella programmazione
 - Il programma è errato ma appare corretto e termina in uno stato di "stuck" che sembra corretto
 - Come riconoscerlo? Come Impedirlo: Usare un sistema di tipi (sound)

³ Uno stato di "stuck" non è uno stato con anomalie quali eccezioni di programma o di sistema. Stati con eccezione sono invece da considerarsi legali e raggiungibili anche da computazioni corrette.

- Consiste di 3 strutture:
 - **Dominio dei Tipi** (che include i tipi basici del Linguaggio)
Esempi. $T = \text{Void} + \text{Int} + \text{Char} + \dots$
 - (Linguaggio delle) **Espressioni di Tipo** con cui possono essere definiti tipi (derivati)
Esempi. $T = \dots + T \times \dots \times T \rightarrow T + \dots$
 - **Regole (di inferenza)** con cui il sistema associa un unico tipo a ogni struttura del programma
Esempi.
$$\frac{E : \text{bool} \quad C : \text{Void}}{\text{while } E \text{ do } C : \text{Void}} \quad \frac{E : \text{bool} \quad E_{\text{then}} : T1 \quad E_{\text{else}} : T2 \quad T1 = T = T2}{E ? E_{\text{then}} E_{\text{else}} : T}$$

- Se il linguaggio ha Sistema di Tipi *sound*, allora

Proposition

Un programma è safe da "stuck" se il Sistema assegna a ogni struttura 1 e 1 solo tipo.

Relazioni e Proprietà sulla struttura dei Tipi

Intervengono quando **non c'è identità** tra tipo atteso e tipo effettivo.

Esempio. `{T1 x; ...; x = E}`. Il tipo atteso per E è T1, ma E ha tipo $T2 \neq T1$.

- **Equivalence.** Sia $x:T$ and $y:T'$. Quando x e y hanno stesso tipo?
 - **Nominal.** Ogni tipo è uguale solo a se stesso.
Esempi. `{type T1 = int; T1 x; int y; x=y}` contiene un errore di tipo
 - **Structural.** Stessa espressione di Tipo quando i nomi sono rimpiazzati dalle definizioni.
Esempi. `{type T1 = int; T1 x; int y; x=y}` sequenza corretta
- **Compatibilità e Sottotipo**
 - T è compatibile con S se (un valore di tipo) T può essere usato quando è atteso S.
Esempi. Sottotipi $T \subset S$ in Java
- **Coercion:** T è compatibile con S ma i valori di T devono cambiare rappresentazione per essere usati come S. Esempi. `int` e `float` in C
- **Cast:** compatibilità senza necessità di cambiamenti sulla rappresentazione.
Esempi. oggetto di una sottoclasse e una sua superclasse in Java

Relazioni e Proprietà sulla struttura dei Tipi /2

Intervengono quando **non c'è identità** tra tipo atteso e tipo effettivo.

Esempio. $\{T1 \ x; \dots; x = E\}$. Il tipo atteso per E è T1, ma E ha tipo $T2 \neq T1$.

- **Overloading** (Polimorfismo ad Hoc) Differenti tipi e valori funzionali per uno stesso (Function) identifier;
Esempi. $+$, $*$, \dots per int e float hanno definizioni completamente diverse ma si chiamano nello stesso modo.
- **Parametric Polymorphism** (Polimorfismo generico) Le espressioni di tipo includono variabili quantificate universalmente su i tipi del linguaggio.
Permettono di esprimere insieme (anche infiniti) di tipi. Nei sistemi di tipi, un ordinamento parziale permette sempre di individuare il **tipo più generale** nell'insieme di quelli associabili ad ogni struttura del programma.
Esempi. $Seq(t)$, $\langle t \rangle Seq(t)$ $QSort(Seq(t)S, t \times t \rightarrow bool L)$ nel QuickSort;
Una sola $\langle t \rangle Swap(\dots tx, \dots ty)$ su un generico t invece che tante $Swap$ per diversi tipi utilizzati nel programma.
Meccanismo fondamentale per riuso di codice (presente in tutti i linguaggi di ultima generazione)
- **Polimorfismo di sottotipo.** Polimorfismo in combinazione con i sottotipi.
Esempi. Java prime versioni solo Polimorfismo di sottotipo, successive versioni Polimorfismo generico e di sottotipo (lo useremo)

Tipi in C.

- **Sistema di Tipi.** Il linguaggio C non ha un Sistema di Tipi, ovvero ha:
 - **Dati e Tipi di dato:** Vari tipi di dato, inclusi interi, caratteri, record (i.e. struct), array ...
 - **Nomi ed Espressioni** per dichiarare i dati usati
 - **Nessun Sistema di Regole** per associare un unico tipo ad ogni struttura del programma

Nell'esempio sullo stuck di un programma, la variabile "a" è calcolata come avente 2 distinti e incomparabili tipi:

- 1) char, nell'assegnamento di 'e';
- 2) int nella somma con "x".

- **Uso dei tipi in C** persegue 3 principali scopi:
 - **Allocazione Statica** della memoria necessaria a contenere i dati attesi (compilatore)
 - **Allocazione Dinamica** della memoria necessaria a contenere i dati calcolati (esecuzione run-time)
 - **Annotazione** per evidenziare l'organizzazione concettuale del programma

Union in C.

```
union Ide{T1 ide1; ...; Tn iden};  
union Ide{T1 ide1; ...; Tn iden} x;  
typedef union Ide{T1 ide1; ...; Tn iden} T;
```

- **union** Ide{T₁ ide₁; ...; T_n ide_n};
definisce (ma non alloca) una struttura di memoria:
 - **Condivisa:** da valori di n differenti tipi di dato $T_1 \dots T_n$
+ Ad ogni istante la struttura può contenere uno solo di tali valori
 - **n-Accessi** differenti: uno per ciascun selettore $ide_1 \dots ide_n$
+ Il selettore usato stabilisce la struttura con cui si accede al contenuto

Esempio.

Dichiarazione di costante, di variabile, di array, di coppia di Dichiarazioni, formano in C un unico tipo di dato A se A è un union ed il valore di ciascun di tali tipi di dato è selezionabile con uno specifico selettore di A

Union in C.

```
union Ide{T1 ide1; ...; Tn iden};  
union Ide{T1 ide1; ...; Tn iden} x;  
typedef union Ide{T1 ide1; ...; Tn iden} T;
```

- **Allocazione** di valori del tipo di dato **union** Ide{T₁ ide₁; ...; T_n ide_n}
 - **Allocazione Statica** eseguita a compile-time su Memoria Statica
+ via dichiarazioni di variabili (val. modificabili) per valori union:
union Ide x, ..., z;
 - **Allocazione Dinamica** eseguita a run-time su Memoria Dinamica
+ via dichiarazioni di variabili per valori puntatori a union:
union Ide * x, ..., z;
+ via operatori di allocazione dinamica esplicita:
(**union** Ide*) malloc(sizeof(**union** Ide))
- **Quando** usare allocazione dinamica?
+ Quando il numero di valori da introdurre dipende dall'esecuzione del programma. (vedi esercizio L9.)

Union in C.

```
union Ide{T1 ide1; ...; Tn iden};  
union Ide{T1 ide1; ...; Tn iden} x;  
typedef union Ide{T1 ide1; ...; Tn iden} T;
```

- **Accesso** attraverso uno dei selettori: Quale?
 - **Selettore Corretto** ovvero,
 - + quello relativo all'ultima modifica
 - **Ultima modifica** dove e come si trova?
 - + è sufficiente una variabile per ricordare
 - + il programmatore deve provvedere alla gestione di tale variabile
- **Una metodologia per la gestione in C.** Usare sempre uno struct che
 - + accoppi ogni **union** con una variabile per il controllo del suo accesso
 - + Esempio: Nel caso di **union** Ide{T₁ ide₁; ...; T_n ide_n}

```
typedef enum{ide1, ..., iden} Tflag;  
struct IdeElem {Tflag flag; union Ide acc};
```

Tipi Algebrici o Concreti

Definition (Tipi di Dato Algebrico)

I Tipi di Dato Algebrico sono collezioni di valori (anche strutturati), detti "termini", definiti per iniezione a partire da un insieme finito $G = \{g_i : T_{i_1} \times \dots \times T_{i_k} \rightarrow T_G\}$ di funzioni iniettive, dette "costruttori", di nome g_i , e segnatura $T_{i_1} \times \dots \times T_{i_k} \rightarrow T_G$ dati, dove $k \geq 0$ e T_G sia il tipo dei valori definiti con G . Allora l'insieme di tali termini è

$$\mathcal{D}^{T_G} \equiv \{g_i(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \mid v_{i_j} \in \mathcal{D}^{T_{i_j}}\},$$

dove abbiamo indicato con \mathcal{D}^T l'insieme dei valori di tipo T .

Proposition (Presentazione e Identità Sintattica)

Presentazione. *Un valore algebrico, o termine, ha sempre forma $g(v_1, \dots, v_k)$, dove g sia un costruttore di arità $k \geq 0$ e v_1, \dots, v_k valori di tipo atteso dalla segnatura di g .*

Identità Sintattica \equiv . *Siano $g(v_1, \dots, v_n)$ e $g'(v'_1, \dots, v'_m)$ due valori di uno stesso tipo di dato algebrico. Allora,*

$$g(v_1, \dots, v_n) = g'(v'_1, \dots, v'_m) \quad \text{sse } g \equiv g' \wedge n = m \wedge v_1 = v'_1 \wedge \dots \wedge v_n = v'_m$$

- In Ocaml, i tipi algebrici sono introdotti con dichiarazioni di tipo della forma:

```
type TG = g1 of Texp1,1 * ... * Texp1,k1
      | ...
      | gn of Texpn,1 * ... * Texpn,kn
```

Dove: - ...

- In Ocaml, i tipi algebrici sono introdotti con dichiarazioni di tipo della forma:

```
type TG = g1 of Texp1,1 * ... * Texp1,k1
          | ...
          | gn of Texpn,1 * ... * Texpn,kn
```

- **Dove:**

- T_G è il nome del tipo e deve iniziare con un carattere **minuscolo**
- g_1, \dots, g_n sono i nomi dei costruttori e hanno primo carattere **maiuscolo**
- $\text{of } Texp_{i,1} * \dots * Texp_{i,k_i}$ è omissso quando $k_i = 0$, i.e. g_i ha arità 0
- $\text{of } Texp_{i,1} * \dots * Texp_{i,k_i}$ definisce la tupla dei tipi degli argomenti
- $Texp_{i,j}$ è una qualunque espressione di tipo Ocaml
- l'ordine dei costruttori è inessenziale
- Nel caso di tipi algebrici polimorfi:
 - T_G ha prefisso la lista $'a_1, \dots, 'a_r$ delle variabili generiche
 - $Texp_{i,j}$ può contenere variabili in $\{'a_1, \dots, 'a_r\}$ come libere

- **Ricorsiva** T_G può occorrere come tipo in $Texp_{i,k_i}$

- **Allocazione Dinamica** Ogni valutazione di $g_i(v_{i,1}, \dots, v_{i,k_i})$ alloca dinamicamente una struttura di costruttore g_i avente k_i componenti di valore $v_{i,1}, \dots, v_{i,k_i}$ in tale ordine.

Programmare con Tipi Algebrici o Concreti

- Programmare con Tipi Algebrici richiede non solo saper:
 - **Definire tipi algebrici.**
Esempio, alberi ('a, 'b)gTree in OCaml

```
type('a,'b)gTree = E | L of 'a | R of ('b * ('a,'b)gTree list)
```
 - **Esprimere valori** di un tipo di dato algebrico.
Esempio, l'albero tree:

```
let tree = R("root1", [L 1; L 2; R("root2", [])]; E)
```
- anche saper:
 - **Visitare la Struttura**
Esempio: l'albero tree è una foglia? Ha più di 1 sottoalbero?
 - **Accedere Componenti.**
Esempio: se tree ha sottoalberi, qual'è il suo primo sottoalbero?
 - **Modificare Componenti**
Esempio: Ocaml permette tipi algebrici a componenti modificabili
- Operazioni per Visita, Accesso e Modifica (quando ammesso) ottenute:
 - Meccanismo di Pattern-Matching (Ocaml, e Ling. funzionali)
 - Meccanismi ad hoc

Pattern-Matching

Pattern-Matching è un meccanismo per *visitare*, *accedere*, *"modificare"* valori e componenti di tipi algebrici o concreti

- È realizzato mediante:
 - **Patterns** per tipi di dato algebrico
 - Operazione **Match** per coppie pattern-termine
- Sia $G = \{g_i : T_{i_1} \times \dots \times T_{i_k} \rightarrow T_G\}$ l'insieme dei costruttori di un Tipo Algebrico T_G , e indichiamo con X^{T_G} l'insieme delle variabili di tipo T_G
 - **Termini**. $\mathcal{D}^{T_G} \equiv \{g_i(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \mid v_{i_j} \in \mathcal{D}^{T_{i_j}}\}$
Ad esempio: $R(\text{"root1"}, [L\ 1; L\ 2; R(\text{"root2"}, []); E])$ è un termine di $(\text{'a'}, \text{'b'})\text{gTree}$, in Ocaml.
 - **Patterns** $\mathcal{P}^{T_G} \equiv \{g_i(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \mid v_{i_j} \in \mathcal{P}^{T_{i_j}}\} \cup X^{T_G}$
Ad esempio⁴ : $R(x, [L\ w; L\ 2; y; z])$ è un pattern dove x è una variabile di tipo `string`, w di tipo `int`, y , z di tipo `(int, string)gTree`.
- Operazione Match: Dato T_G ,
 - $\text{Match} : \mathcal{D}^{T_G} \times \mathcal{P}^{T_G} \rightarrow \text{Sostituzione}$
....

⁴Quando T non è Algebrico, $\mathcal{P}^T \equiv \mathcal{D}^T \cup X^T$. Vedi esercizio L9.12. 

Pattern-Matching in Ocaml

Pattern-Matching è un meccanismo per *visitare, accedere, "modificare"* valori e componenti di tipi algebrici o concreti

- Operazione Match: Dato T_G ,
 - $\text{Match} : \mathcal{D}^{T_G} \times \mathcal{P}^{T_G} \rightarrow \text{Sostituzione}$
 - Sostituzione è l'insieme dei legami di variabili-valori che rendono il pattern uguale al termine dato, oppure *fail* se tale insieme non esiste.

Esempio:

$\text{Match}(\text{R}(\text{"root1"}, [\text{L } 1; \text{L } 2; \text{R}(\text{"root2"}, [])]; \text{E}), \text{R}(x, [\text{L } w; \text{L } 2; y; z]))$
calcola la sostituzione $\{x = \text{"root1"}, w = 1, y = \text{R}(\text{"root2"}, []), z = \text{E}\}$

- Ocaml incorpora l'operazione Match in un costrutto `match_with`.
- Costrutto `match_with` è un condizionale multi-way avente la seguente forma:

```
match term with
  | pattern1 -> exp1
  | ...
  | patternn -> expn
```

dove `term` è un valore di un tipo algebrico T , e `pattern1, ..., patternn` sono n patterns per lo stesso tipo T che devono fornire una copertura per T (ovvero, per ogni termine di T deve esistere un pattern nella copertura e una sostituzione per esso che rende il pattern identico al termine)

calcola `expi` tale che i è il più piccolo indice per cui:

$\text{Match}(\text{term}, \text{pattern}_i) \neq \text{fail}$

Pattern-Matching in Ocaml: Esempi

Pattern-Matching è un meccanismo per *visitare*, *accedere*, "*modificare*" valori e componenti di tipi algebrici o concreti

- Costrutto `match with` è un condizionale multi-way avente la seguente forma:

```
match term with
  | pattern1 -> exp1
  | ...
  | patternn -> expn
```

dove `term` è un valore di un tipo algebrico `T`, e `pattern1, ..., patternn` sono ...
calcola `expi` tale che `i` è il più piccolo indice per cui:

`Match(term, patteri) ≠ fail`

Esempio (Calcolo della sostituzione)

Definiamo un tipo per la presentazioni delle sostituzioni:

```
type 'a subst = Sub of 'a | Fail;;
ed usiamolo nel match di termini di tipo ('a, 'b)gTree definito prima.
let tree = R("root1", [L 1; L 2; R("root2", []); E]);;
match tree with R(x, [L 1; L 2; y; z]) -> Sub(x, y, z) | w -> Fail;;
Cosa otteniamo in Ocaml?
```

Esempio (Predicati e Selettori di gTree)

Definiamo i predicati `isE`, `isL`, `isR` per riconoscere i valori delle 3 diverse strutture :

```
let isE tree = match tree with E -> true | _ -> false;;
let isL tree = match tree with L _ -> true | _ -> false;;
let isR tree = match tree with R _ -> true | _ -> false;;
```

- 1 (a) Si faccia un esempio di valore calcolabile ma non memorizzabile: Si dica quale linguaggio lo usa e come tale valore è introdotto e può essere usato nei programmi di tale linguaggio.
(b) In C abbiamo valori con tali caratteristiche?
- 2 Quali sono le caratteristiche distintive dei tipi di dato?
- 3 Indicare i 4 principali scopi per la presenza dei tipi nei Linguaggi di Programmazione.
- 4 (a) Cos'è la Type Safety?
(b) Cos'è uno stato di stuk?
(c) Come può essere verificata la safety di un programma?
- 5 (a) In cosa equivalenza nominale e strutturale si differenziano?
(b) In cosa il cast si differenzia dalla coercion?
- 6 (a) Cos'è una variabile di tipo e in quale meccanismo è utilizzata? (b) In cosa si differenzia l'overloading dal polimorfismo parametrico?
- 7 Si consideri la seguente definizione OCaml:
$$\text{unC } g = \text{fun } (x, y) \rightarrow g \ x \ y$$

(a) Si dica quale tipo ha?
(b) Si dica quale funzione definisce.
- 8 Il termine $\lambda x. x \ x$ è un termine sintatticamente corretto del Lambda Calcolo e
(a) può essere "trascritto" in OCaml ottenendo il termine ?
(b) che per quanto sintatticamente corretto non ha un tipo associabile: Perché?