Sommario: 27 febbraio, 2018

- Linguaggi di Programmazione: Cosa sono? A cosa servono?
- Funzioni Calcolabili e Funzioni Parziali
- Linguaggio, Programma, Algoritmo e Funzione Calcolabile
- Relazione tra Linguaggio di Prog. e Funzioni Calcolabile
- Esercizi

Linguaggi di Programmazione: Cosa sono? A cosa servono?

- Rispondiamo in 5+1 slides mostrando che sono lo strumento di congiunzione tra alcune nozioni correlate.

Definizione (Linguaggi di Programmazione LP)

Sono gli **Strumenti** *Formali, Fondamentali che* **definiscono strutture finite, chiamate Programmi,** *per:*

- **Esprimere** *tutte e solo le* Computer Applications
- **Definire** *tutte e solo le* Funzioni Calcolabili
- **Implementare** *gli* Algoritmi *e renderli* Processi Automatici

Linguaggi di Programmazione: A cosa servono? /1

Gli **Strumenti** Formali, Fondamentali per:

- **Esprimere** tutte e solo le *Computer Applications*:
  - *Computer Applications* sono tutte le applicazioni che:
    - *sono state*, *sono* e *saranno*[1] realizzabili in Processi Automatici (eseguibili oggi, su computers *isolati* e/o *interconnessi*)
    - *pervadono ogni comparto e attività* della nostra esistenza: Information, Production, Education, Research, Culture, Health...

- **Definire** tutte e solo le *Funzioni Calcolabili*, $\mathcal{F}$.

[1] Tesi di Church-Turing 1936, o tesi dell'equivalenza dei modelli di calcolo, M.Mirsky, Computation: Finite and Infinite Machines, 1972, pag.108-109

Linguaggi di Programmazione: A cosa servono? /2

Gli **Strumenti** Formali, Fondamentali per:

- **Esprimere Tutte** tutte e solo *Computer Applications*

  ...
- **Definire Tutte** tutte e solo *Funzioni Calcolabili*, $\mathcal{F}$.

Definizione (Funzioni Calcolabili $\mathcal{F}$)

Sia $\mathcal{D}$ insieme numerabile,

- $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathcal{D} \to \mathcal{D}] \subset \mathcal{D} \to \mathcal{D}$[a]
- *Continue in Topologia di Scott:* $\mathcal{D} \cong$[b]$[\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$
- *definite*[c] *mediante* specifici formalismi, *che includono:* *Combinatory Logic, λ-Calculus, Turing Machines, State Machines,...,* **Linguaggi di Programmazione (LP)**

[a] $\mathcal{D} \to \mathcal{D}$ è l'insieme non numerabile contenente tutte le funzioni **Parziali** da $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}$

[b] $\cong$ sta per *isomorfo*, vedi D.Scott, Continuous Lattices, Lecture Notes in Mathematics 274 (1972), 97-136

[c] "definite", qui, significa *finitamente, completamente definite.*

Cosa calcola un programma? – Funzioni Parziali

Consideriamo il programma (codice) F in Linguaggio C:

```
int F(int n){
   if (n<0) return 0;
   if (n==0) return 1;
   return n*F(n-1);}
```

F calcola una funzione sugli interi n che vale n! sui naturali e...

Consideriamo il programma (codice) G in Linguaggio C:

```
int G(int n){
   if (n==0) return 1;
   return n*G(n-1);}
```

G calcola una funzione ... che vale n! sui naturali e
è **indefinita** sui negativi
altrimenti detto, è **divergente** sui negativi
altrimenti detto, **vale** $\perp$ (indefinito) sui negativi

Funzioni Parziali

Definizione (Funzioni Parziali su $\mathcal{D}$)

Sono funzioni che possono essere non definite su alcuni punti del dominio $\mathcal{D}$.

- Non è un problema di "scelta del" dominio di definizione.
- È un problema di "Terminazione del Programma" che definisce la funzione

Esempio (Funzioni Parziali)

Una stream (illimitata) di interi da leggere fino ai primi due continui uguali ...

```
void main(){
    int last, curr;
    scanf("%d",last);
    scanf("%d",curr);
    while(last!=curr){last=curr; scanf("%d",curr);}
    printf("%d",curr);
}
```

Leggerà due contigui uguali? Cos'è una stream in $\mathcal{D}$? Si consideri Esercizio L1.10

Linguaggi di Programmazione: Cosa sono? /3

Gli **Strumenti** Formali, Fondamentali per:

- **Esprimere** tutte e solo *Computer Applications*...
- **Definire** tutte e solo *Funzioni Calcolabili*, $\mathcal{F}$

Definizione (Linguaggio di Programmazione $\mathcal{L}$ $\in$LP)

Sia $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$ *l'insieme delle funzioni calcolabili.*
Sia $\mathcal{L}$ $\in$**LP**. *Sia* $\mathcal{P}$ *l'insieme (numerabile) dei programmi di* $\mathcal{L}$*.*
Sia $^{-}$ *una iniezione di* $\mathcal{P}_\mathcal{L}$ *in* $\mathcal{D}$*. Allora,* $\overline{\mathrm{p}} \in \mathcal{D}$ *sta per* $^{-}(\mathrm{p}), \forall p \in \mathcal{P}_\mathcal{L}$*.*

- *(Universale)* $\exists \mathcal{U}_\mathcal{L} \in \mathcal{F}$,
- *(Meaning)* $\exists\, [|\_|] : \mathcal{P}_\mathcal{L} \to \mathcal{F}$, *suriettiva,*
- $\forall \mathrm{p} \in \mathcal{P}$,
  $$\mathcal{U}_\mathcal{L}(\overline{\mathrm{p}}) = \mathrm{g} \in (\mathcal{D} \cong [\mathcal{D} \to \mathcal{D}] \equiv)\ \mathcal{F}$$
- $\forall \mathrm{g} \in \mathcal{F}$, *sia* $\mathrm{g} = [|\mathrm{p}|]$, *per qualche* $p \in \mathcal{P}_\mathcal{L}$
  $$\mathcal{U}_\mathcal{L}(\overline{\mathrm{p}})(\mathrm{x}) = \mathrm{g}(\mathrm{x}) \quad \forall \mathrm{x} \in \mathcal{D}$$

Relazione tra $\mathcal{F}$ e **LP**

,

Definizione (Relazione tra $\mathcal{F}$ e **LP**)

- $\mathcal{F} \equiv [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$, $\mathcal{L} \in$**LP**
  - *(Universale)* $\exists \mathcal{U} \in \mathcal{F}$,
  - *(Meaning)* $\exists\, [|\_|] : \mathcal{P} \to \mathcal{F}$, *suriettiva,*
  - $\forall \mathrm{p} \in \mathcal{P}^a$,
    $$\mathcal{U}(\overline{\mathrm{p}}) = \mathrm{g} \in (\mathcal{D} \cong [\mathcal{D} \to \mathcal{D}] \equiv)\ \mathcal{F}$$
  - $\forall \mathrm{g} \in \mathcal{F}$, *sia* $\mathrm{g} = [|\mathrm{p}|]$, *per qualche p*$\in \mathcal{P}$
    $$\mathcal{U}(\overline{\mathrm{p}})(\mathrm{x}) = \mathrm{g}(\mathrm{x}) \quad \forall \mathrm{x} \in \mathcal{D}$$

dove:
$\mathcal{D}$ *numerabile,* $[\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$ *funzioni continue su* $\mathcal{D} \to \mathcal{D}$ *con topologia di Scott* (quindi, $\mathcal{D} \cong [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$), $\mathcal{P}$ *insieme programmi di* $\mathcal{L}$, $^{-} : \mathcal{P} \to \mathcal{D}$ *iniettiva.*

---

[a] $\mathcal{P}$ dipende da $\mathcal{L}$, e scriveremo estesamente $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ quando più linguaggi $\mathcal{L}$ sono considerati e potrebbe esserci ambiguità. Analogamente, è la funzione universale $\mathcal{U}$ di $\mathcal{L}$, e il mapping suriettivo $[|\_|]$

Linguaggi di Programmazione: A cosa servono? /4

Gli **Strumenti Formali, Fondamentali** (che introducono strutture finite: I Programmi) per:

- **Esprimere Tutte** le *Computer Applications*

  ...
- **Definire Tutte** le *Funzioni Calcolabili* $\mathcal{F}$.

  ...
- **Implementare** gli *Algoritmi* e renderli *Processi Automatici*

  —— Nella prossima Lezione

Esercizi L1

1. Scrivere un programma C che calcoli la funzione *ordinamento di sequenza* implementando l'algoritmo di QuickSort. Allo scopo completare il testo con eventuali vincoli che si ritenga utile assumere.
2. Se e dove, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo che $\mathcal{F}$ è numerabile.
3. Se e dove, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo che la funzione $[|\_|]$ è calcolabile. E se si, cosa calcola.
4. Se e dove, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo che $\mathcal{P}$ contiene un programma che calcola $[|\_|]$.
5. Se e quale relazione, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo tra l'iniettiva $^{-} : \mathcal{P} \to \mathcal{D}$ e la suriettiva $[|\_|]$.
6. Se e dove, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo che per ogni funzione calcolabile c'è un programma che la calcola.
7. Se e dove, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo che ogni linguaggio di programmazione definisce tutte e solo le funzioni calcolabili.
8. Se e dove, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo che $[|\_|]$ stabilisce una corrispondenza uno-uno tra $\mathcal{P}$ e $\mathcal{F}$.
9. Facendo riferimento all'esercizio 1 sopra. Si commenti la funzione calcolata dal programma scritto, in particolare si dica: Quali sono i valori del numerabile $\mathcal{D}$? Cosa sono le sequenze rispetto a tali valori? Cos'è in $\mathcal{F}$ un ordinamento di tali sequenze?
10. In un esempio dei lucidi abbiamo usato il termine stream ad indicare una struttura dati in grado di fornire un'illimitata sequenza di valori. Come potrebbe essere definita una tale struttura in termini di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{D}$?