Come descrivere un Linguaggio di Programmazione

Sommario: 2 marzo, 2016

- Sintassi, Semantica, Pragmatica e Implementazione
- Grammatiche e Sintassi
- Grammatiche Context Free: Derivazione, Alberi, Ambiguità
- Sintassi: Proprietà contestuali
- Compilatore: Le fasi di analisi sintattica, semantica e di generazione del codice
- Semantica: Formalismi
- Semantica operazionale strutturata: Stato, Transizione, Computazione.

Sintassi

- Un programma si presenta come una "lunga" sequenza di caratteri che rappresentano simboli e strutture del linguaggio con cui il programma è espresso.

```
#include<stdio.h> #include<stdlib.h> voidXSwap(intA[], intB[]){A[0] = ...
```

- **Lessico**. La definizione di come e quali sequenze di caratteri formano simboli (inclusi i separatori di simboli) affidata al Lessico.

- **Sintassi**. La definizione di come e quali sequenze di simboli formano costrutti e la struttura del programma affidata alla Sintassi.

Grammatiche

- **Grammatiche**. Lessico e Sintassi possono essere completamente definite mediante grammatiche:
  - Lineari, per il lessico, $\mathcal{G}^{\mathcal{R}}$.
  - Libere da contesto (Context Free), per la sintassi, $\mathcal{G}^{\mathcal{F}}$.
  - $\mathcal{G}^{\mathcal{R}} \subset \mathcal{G}^{\mathcal{F}}$.

- Sia A insieme finito di simboli (caratteri):
  - $\mathbf{A}^\star$ insieme di tutte le sequenze finite di simboli su A.
  - $\mathtt{A}^\star$ è chiuso rispetto all'operatore binario, associativo, $\_.\_$, chiamato *giustapposizione*[1]: esempio Pi.sa = Pisa.
  - $\epsilon \in \mathtt{A}^\star$ seq. vuota: $\epsilon.\mathtt{q} = \mathtt{q} = \mathtt{q}.\epsilon, \forall \mathtt{q} \in \mathtt{A}^\star$

Definition (Linguaggio (formale) su A)

Un linguaggio (formale) su A è un sottoinsieme di $\mathtt{A}^\star$

[1] la sua notazione è omessa quando non vi è ambiguità

Grammatiche Libere, $\mathcal{G}^{\mathcal{F}}$ /1

Definition (Grammatica Libera)

Una grammatica libera è una quadrupla (NT,T,R,S) tale che:

- **NT** insieme finito dei non terminali.
- **T** insieme finito dei terminali.
- **S** simbolo iniziale, S∈NT.
- **R** insieme finito delle produzioni,

$$\mathtt{R} \equiv \{\mathtt{V_i} \longrightarrow \mathtt{w_i} \mid \mathtt{w_i} \in (\mathtt{T} \cup \mathtt{NT})^*, \mathtt{i} \in [1, \mathtt{k}]\}$$

Esempio

$\mathtt{G} = (\{\mathtt{E}\}, \{\mathtt{I}, +, *, (,)\}, \mathtt{E}, \mathtt{R})$

$\mathtt{R} = \{\mathtt{E} \longrightarrow \mathtt{E} + \mathtt{E}, \mathtt{E} \longrightarrow \mathtt{E} * \mathtt{E}, \mathtt{E} \longrightarrow \mathtt{I}, \mathtt{E} \longrightarrow (\mathtt{E})\}$

Notazione. $\mathtt{V} \longrightarrow \alpha_1 | ... | \alpha_k$ invece di $\mathtt{V_1} \longrightarrow \alpha_1, ..., \mathtt{V_k} \longrightarrow \alpha_k$ quando, $\mathtt{V} = \mathtt{V_1} = ... = \mathtt{V_k}$.

Esempio

$\mathtt{R} = \{\mathtt{E} \longrightarrow \mathtt{E} + \mathtt{E} \mid \mathtt{E} * \mathtt{E} \mid \mathtt{I} \mid (\mathtt{E})\}$

Grammatiche Libere, $\mathcal{G}^{\mathcal{F}}$ /2

Esempio

$\mathtt{G} = (\{\mathtt{E}\}, \{\mathtt{I}, +, *, (,)\}, \mathtt{E}, \mathtt{R})$

$\mathtt{R} = \{\mathtt{E} \to \mathtt{E} + \mathtt{E}, \mathtt{E} \to \mathtt{E} * \mathtt{E}, \mathtt{E} \to \mathtt{I}, \mathtt{E} \to (\mathtt{E})\}$

Qual'è il significato di G? [2]

Definition (La relazione $\Rightarrow$)

Ogni grammatica libera $\mathtt{G} \equiv (\mathtt{NT}, \mathtt{T}, \mathtt{R}, \mathtt{S})$ definisce una relazione binaria $\Rightarrow_{\mathtt{G}}$ (o, semplicemente $\Rightarrow$) su $(\mathtt{T} \cup \mathtt{NT})^*$ tale che:

$$\forall\, \alpha.\mathtt{V}.\rho,\ \alpha.\gamma.\rho \in (\mathtt{T} \cup \mathtt{NT})^*, \quad \alpha\mathtt{V}\rho \Rightarrow \alpha\gamma\rho \text{ sse } \mathtt{V} \to \gamma \in \mathtt{R}$$

Definition (Linguaggio generato)

Sia $\mathtt{G} \equiv (\mathtt{NT}, \mathtt{T}, \mathtt{R}, \mathtt{S})$ libera. Il linguaggio definito da $\mathtt{G}$:

$$\mathcal{L}(\mathtt{G}) = \{\alpha \in \mathtt{T}^\star | \mathtt{S} \Rightarrow^\star \alpha\}$$

dove, $\Rightarrow^\star$ è la chiusura transitiva (e riflessiva) di $\Rightarrow_{\mathtt{G}}$

[2] "sse" sta per "se e solo se"

Grammatiche Libere, $\mathcal{G}^{\mathcal{F}}$ /3

Definition (Derivazione)

Sia $\mathtt{G} \equiv (\mathtt{NT}, \mathtt{T}, \mathtt{R}, \mathtt{S})$ libera. Siano $\mathtt{v}, \mathtt{w} \in (\mathtt{T} \cup \mathtt{NT})^*$. Sia $\mathtt{v} \Rightarrow^\star \mathtt{w}$. Una derivazione, in $\mathtt{G}$, da $\mathtt{v}$ a $\mathtt{w}$, è una sequenza $\mathtt{v} \Rightarrow \mathtt{w}_0 \Rightarrow \mathtt{w}_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \mathtt{w}$

Esempio

La derivazione ci fornisce una prova di appartenenza. Si dimostri che $\mathtt{I} * \mathtt{I} + \mathtt{I} \in \mathcal{L}(\mathtt{G})$.

$\mathtt{G} = (\{\mathtt{E}\}, \{\mathtt{I}, +, *\}, \mathtt{E}, \mathtt{R})$

$\mathtt{R} = \{\mathtt{E} \longrightarrow \mathtt{E} + \mathtt{E}, \mathtt{E} \longrightarrow \mathtt{E} * \mathtt{E}, \mathtt{E} \longrightarrow \mathtt{I}, \mathtt{E} \longrightarrow (\mathtt{E})\}$

Procediamo applicando una $\Rightarrow$ alla volta a partire da $\mathtt{E}$

$\mathtt{E} \Rightarrow_2 \mathtt{E} * \mathtt{E}$ [3]

$\Rightarrow_3 \mathtt{I} * \mathtt{E}$

$\Rightarrow_1 \mathtt{I} * \mathtt{E} + \mathtt{E}$

$\Rightarrow_3 \mathtt{I} * \mathtt{I} + \mathtt{E}$

$\Rightarrow_3 \mathtt{I} * \mathtt{I} + \mathtt{I}$

Aggiungendo induzione possiamo dimostrare che:

$$\{\mathtt{I}.\alpha_1.\cdots.\alpha_\mathtt{n} \mid \alpha_\mathtt{i} \in \{+\mathtt{I}, *\mathtt{I}\}, \mathtt{n} \geq 0\} \subset \mathcal{L}(G).$$

[3] Un pedice può indicare la produzione usata. In questo caso, usiamo la posizione a partire da 1 per la produzione più a sinistra

Grammatiche Libere: La relazione $\Rightarrow$ su alberi /1

Esempio

$$G = (\{E\}, \{I, +, *, (,)\}, E, R)$$
$$R = \{E \to E + E, E \to E * E, E \to I, E \to (E)\}$$

- La $\Rightarrow$ su sequenze di simboli (stringhe) grammaticali ci dice proprio tutto?

$$E \Rightarrow_2 E * E \Rightarrow_3 I * E \Rightarrow_1 I * E + E \Rightarrow_3 I * I + E \Rightarrow_3 I * I + I$$
$$E \Rightarrow_2 E * E \Rightarrow_1 E * E + E \Rightarrow_3 I * E + E \Rightarrow_3 I * I + E \Rightarrow_3 I * I + I$$
$$E \Rightarrow_1 E + E \Rightarrow_2 E * E + E \Rightarrow_3 I * E + E \Rightarrow_3 I * I + E \Rightarrow_3 I * I + I$$

- In realtà NO.
  - 2 delle 3 derivazioni sopra ci dicono la stessa cosa, 1 dice una cosa.
  - Quali? In cosa, sono diverse?
  - Useremo la struttura degli alberi per rispondere.

- La sequenza di simboli grammaticali non è abbastanza espressiva

Grammatiche Libere: La relazione $\Rightarrow$ su alberi /2

Definition

- $[] \in \mathtt{Tree}^{\mathtt{A}}$
- $[\mathtt{a} - (\mathtt{t}_1, ..., \mathtt{t}_n)] \in \mathtt{Tree}^{\mathtt{A}}$, per $\mathtt{a} \in \mathtt{A}, \mathtt{t}_i \in \mathtt{Tree}^{\mathtt{A}}, \mathtt{n} \geq 0$

Notazione. [a - ()] può essere scritto [a].

- Gli alberi possono essere utilizzati come relazioni sulla struttura di un termine
  - Ogni arco è una coppia della relazione *sottotermine*
- Hanno una rappresentazione grafica.
  - mostriamo quella di [E - ([E],[+],[E])]

Grammatiche Libere: La relazione $\Rightarrow$ su alberi /3

Definition (La relazione $\Rightarrow^{\mathtt{Tree}}$)

Ogni grammatica libera $\mathtt{G} \equiv (\mathtt{NT}, \mathtt{T}, \mathtt{R}, \mathtt{S})$ definisce una relazione binaria $\Rightarrow^{\mathtt{Tree}}_{\mathtt{G}}$ (o, semplicemente $\Rightarrow^{\mathtt{Tree}}$, ovvero $\Rightarrow$) su $\mathtt{Tree}^{\mathtt{T} \cup \mathtt{NT}}$ tale che:

- $[\mathtt{V}] \Rightarrow [\mathtt{V} - ([\mathtt{u}_1], ..., [\mathtt{u}_n])]$
  sse $\mathtt{V} \longrightarrow \mathtt{u}_1 . \ldots . \mathtt{u}_n \in \mathtt{R}$ and $\mathtt{u}_i \in (\mathtt{T} \cup \mathtt{NT})$
- $[\mathtt{V} - (\mathtt{t}_1, ..., \mathtt{t}_j, ..., \mathtt{t}_n)] \Rightarrow [\mathtt{V} - (\mathtt{t}_1, ..., \mathtt{r}_j, ..., \mathtt{t}_n)]$
  sse $1 \leq j \leq n \wedge (\forall i) \mathtt{t}_i \in \mathtt{Tree}^{\mathtt{T} \cup \mathtt{NT}} \wedge \mathtt{t}_j \Rightarrow \mathtt{r}_j$

Definition (Linguaggio generato su $\mathtt{Tree}^{\mathtt{T} \cup \mathtt{NT}}$ - Parse Tree set)

Sia $\mathtt{G} \equiv (\mathtt{NT}, \mathtt{T}, \mathtt{R}, \mathtt{S})$ libera. Il linguaggio definito da $\mathtt{G}$:

$$\mathcal{L}(\mathtt{G}) = \{\alpha \in \mathtt{Tree}^{\mathtt{T} \cup \mathtt{NT}} \mid [\mathtt{S}] \Rightarrow^{\star} \alpha\}$$

dove, $\Rightarrow^{\star}$ è la chiusura transitiva (e riflessiva) di $\Rightarrow$

Grammatiche Libere: La relazione $\Rightarrow$ su alberi /4

Definition (Derivazione su $\mathtt{Tree}^{\mathtt{T}\cup\mathtt{NT}}$)

Sia $\mathtt{G} \equiv (\mathtt{NT}, \mathtt{T}, \mathtt{R}, \mathtt{S})$ libera. Siano $\mathtt{u}, \mathtt{q} \in \mathtt{Tree}^{\mathtt{T}\cup\mathtt{NT}}$. Sia $\mathtt{u} \Rightarrow^{\star} \mathtt{q}$. Una derivazione, in $\mathtt{G}$, da $\mathtt{u}$ a $\mathtt{q}$, è una sequenza

$\mathtt{u} \Rightarrow \mathtt{q}_0 \Rightarrow \mathtt{q}_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \mathtt{q}$

Esempio

$\mathtt{G} = (\{\mathtt{E}\}, \{\mathtt{I}, +, *, (,)\}, \mathtt{E}, \mathtt{R})$

$\mathtt{R} = \{\mathtt{E} \rightarrow \mathtt{E}+\mathtt{E}, \mathtt{E} \rightarrow \mathtt{E}*\mathtt{E}, \mathtt{E} \rightarrow \mathtt{I}, \mathtt{E} \rightarrow (\mathtt{E})\}$

- La $\Rightarrow$ su stringhe ci dice proprio tutto?

$\mathtt{E} \Rightarrow_2 \mathtt{E}*\mathtt{E} \Rightarrow_3 \mathtt{I}*\mathtt{E} \Rightarrow_1 \mathtt{I}*\mathtt{E}+\mathtt{E} \Rightarrow_3 \mathtt{I}*\mathtt{I}+\mathtt{E} \Rightarrow_3 \mathtt{I}*\mathtt{I}+\mathtt{I}$

$\mathtt{E} \Rightarrow_2 \mathtt{E}*\mathtt{E} \Rightarrow_1 \mathtt{E}*\mathtt{E}+\mathtt{E} \Rightarrow_3 \mathtt{I}*\mathtt{E}+\mathtt{E} \Rightarrow_3 \mathtt{I}*\mathtt{I}+\mathtt{E} \Rightarrow_3 \mathtt{I}*\mathtt{I}+\mathtt{I}$

$\mathtt{E} \Rightarrow_1 \mathtt{E}+\mathtt{E} \Rightarrow_2 \mathtt{E}*\mathtt{E}+\mathtt{E} \Rightarrow_3 \mathtt{I}*\mathtt{E}+\mathtt{E} \Rightarrow_3 \mathtt{I}*\mathtt{I}+\mathtt{E} \Rightarrow_3 \mathtt{I}*\mathtt{I}+\mathtt{I}$

- La $\Rightarrow$ su alberi?

$[\mathtt{E}] \Rightarrow_2 [\mathtt{E}-([\mathtt{E}],[*],[\mathtt{E}])] \Rightarrow_3 [\mathtt{E}-([\mathtt{E}-([\mathtt{I}])],[*],[\mathtt{E}])]$

$\Rightarrow^{\star} [\mathtt{E}-([\mathtt{E}-([\mathtt{I}])],[*],[\mathtt{E}-([\mathtt{E}-([\mathtt{I}])],[+],[\mathtt{E}-([\mathtt{I}])])])]$

$[\mathtt{E}] \Rightarrow^{\star} \ldots$

$[\mathtt{E}] \Rightarrow_1 [\mathtt{E}-([\mathtt{E}],[+],[\mathtt{E}])] \Rightarrow_2 [\mathtt{E}-([\mathtt{E}-([\mathtt{E}],[*],[\mathtt{E}]],[+],[\mathtt{E}])]$

$\Rightarrow^{\star} [\mathtt{E}-([\mathtt{E}-([\mathtt{E}-([\mathtt{I}])],[*],[\mathtt{E}-([\mathtt{I}])]],[+],[\mathtt{E}-([\mathtt{I}])])]$

La relazione $\Rightarrow$ su alberi: Una vista grafica

Esempio

- La $\Rightarrow$ su alberi?

$$[\mathtt{E}] \Rightarrow_2 [\mathtt{E} - ([\mathtt{E}], [*], [\mathtt{E}])] \Rightarrow_3 [\mathtt{E} - ([\mathtt{E} - ([\mathtt{I}])], [*], [\mathtt{E}])]$$
$$\Rightarrow^\star [\mathtt{E} - ([\mathtt{E} - ([\mathtt{I}])], [*], [\mathtt{E} - ([\mathtt{E} - ([\mathtt{I}])], [+], [\mathtt{E} - ([\mathtt{I}])])])]$$

$$[\mathtt{E}] \Rightarrow^\star \ldots$$
$$[\mathtt{E}] \Rightarrow_1 [\mathtt{E} - ([\mathtt{E}], [+], [\mathtt{E}])] \Rightarrow_2 [\mathtt{E} - ([\mathtt{E} - ([\mathtt{E}], [*], [\mathtt{E}]], [+], [\mathtt{E}])]$$
$$\Rightarrow^\star [\mathtt{E} - ([\mathtt{E} - ([\mathtt{E} - ([\mathtt{I}])], [*], [\mathtt{E} - ([\mathtt{I}])]], [+], [\mathtt{E} - ([\mathtt{I}])])]$$

Grammatiche Libere: Frontiera di un albero /5

Definition (Albero di derivazione sintattica o Parse Tree)

Sia $\mathtt{G} \equiv (\mathtt{NT}, \mathtt{T}, \mathtt{R}, \mathtt{S})$ libera. Sia $\mathtt{Q_G} = \{\mathtt{q} \in \mathtt{Tree}^{\mathtt{T} \cup \mathtt{NT}} \mid [\mathtt{S}] \Rightarrow^{\star} \mathtt{q}\}$. $\mathtt{Q_G}$ è l'insieme di tutti e soli gli alberi di derivazione sintattica, detti anche, parse tree, di $\mathtt{G}$.

Definition (Frontiera di un albero /1)

La frontiera di un albero $\mathtt{q} \in \mathtt{Tree}^{\mathtt{A}}$ è una stringa di $\mathtt{A}^{\star}$, ovvero $\mathtt{fron}(\mathtt{q}) \in \mathtt{A}^{\star}$ per ogni $\mathtt{q}$, così definita:

- $\mathtt{fron}([]) = \epsilon$
- $\mathtt{fron}([\mathtt{a}]) = \mathtt{a}$
- $\mathtt{fron}([\mathtt{a} - (\mathtt{t_1}, ..., \mathtt{t_n})]) = \mathtt{fron}(\mathtt{t_1}).\cdots.\mathtt{fron}(\mathtt{t_n}), \quad \mathtt{n} > 0$

Definition (Frontiera di un albero)

La frontiera di un albero $\mathtt{q} \in \mathtt{Tree}^{\mathtt{A}}$ è una stringa di $\mathtt{A}^\star$, ovvero $\mathtt{fron}(\mathtt{q}) \in \mathtt{A}^\star$ per ogni q, così definita:

- $\mathtt{fron}([]) = \epsilon$
- $\mathtt{fron}([\mathtt{a}]) = \mathtt{a}$
- $\mathtt{fron}([\mathtt{a} - (\mathtt{t}_1, ..., \mathtt{t}_n)]) = \mathtt{fron}(\mathtt{t}_1).\cdots.\mathtt{fron}(\mathtt{t}_n), \quad \mathtt{n} > 0$

Esempio

$$\mathtt{fron}([\mathtt{E} - ([\mathtt{E} - ([\mathtt{I}])], [*], [\mathtt{E} - ([\mathtt{E} - ([\mathtt{I}])], [+], [\mathtt{E} - ([\mathtt{I}])])])]) =$$
$$= \mathtt{fron}([\mathtt{E} - ([\mathtt{I}])]).\mathtt{fron}([*]).\mathtt{fron}([\mathtt{E} - ([\mathtt{E} - ([\mathtt{I}])], [+], [\mathtt{E} - ([\mathtt{I}])])])$$
$$= \mathtt{fron}([\mathtt{I}]).\mathtt{fron}([*]).\mathtt{fron}([\mathtt{E} - ([\mathtt{I}])]).\mathtt{fron}([+]).\mathtt{fron}([\mathtt{E} - ([\mathtt{I}])])$$
$$= \mathtt{fron}([\mathtt{I}]).\mathtt{fron}([*]).\mathtt{fron}([\mathtt{I}]).\mathtt{fron}([+]).\mathtt{fron}([\mathtt{I}])$$
$$= \mathtt{I}.*.\mathtt{I}.+.\mathtt{I} = \mathtt{I} * \mathtt{I} + \mathtt{I}$$

Grammatiche Libere: Ambiguità /6

Definition (Linguaggio generato utilizzando Parse Tree)

Sia $\mathtt{G} \equiv (\mathtt{NT}, \mathtt{T}, \mathtt{R}, \mathtt{S})$ libera. Il linguaggio definito da $\mathtt{G}$:

$$\mathcal{L}(\mathtt{G}) = \{\mathtt{fron(q)} \in \mathtt{T}^\star \mid [\mathtt{S}] \Rightarrow^\star \mathtt{q}\}$$

dove, $\Rightarrow^\star$ è la chiusura transitiva (e riflessiva) di $\Rightarrow_{\mathtt{G}}^{\mathtt{Tree}^{\mathtt{T} \cup \mathtt{NT}}}$

Definition (Grammatica Ambigua)

$\mathtt{G} \equiv (\mathtt{NT}, \mathtt{T}, \mathtt{R}, \mathtt{S})$ è ambigua se $\exists \mathtt{q}_1 \neq \mathtt{q}_2 \in \mathtt{Tree}^{\mathtt{T} \cup \mathtt{NT}}$:

- $[\mathtt{S}] \Rightarrow^\star \mathtt{q}_1, [\mathtt{S}] \Rightarrow^\star \mathtt{q}_2$
- $\mathtt{fron}([\mathtt{q}_1]) = \mathtt{fron}([\mathtt{q}_2]) \in \mathtt{T}^*$

Grammatiche Libere: Ambiguità /7

- La **sintassi di un LP** deve essere espressa mediante una grammatica libera **non ambigua**
- Ogni **termine** di LP deve avere **un'unica struttura sintattica** che ne mostra i sottotermini componenti

Esempio Grammatica Ambigua

$$G = (\{E\}, \{I, +, *\}, E, R)$$
$$R = \{E \to E + E, E \to E * E, E \to I, E \to (E)\}$$

Esempio Grammatica non Ambigua

$$G' = (\{E, F, T\}, \{I, +, *\}, E, R')$$
$$R' = \{E \to E + F \mid F$$
$$F \to F * T \mid T$$
$$T \to I \mid (E)\}$$

$$\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G')$$

Grammatiche: Lessico e Sintassi

- Lessico e Sintassi si integrano nella definizione di un Linguaggio

Esempio sottoLinguaggio delle Espressioni Aritmetiche
Sintassi: Espressione

$$\mathtt{G} = (\{\mathtt{E}, \mathtt{F}, \mathtt{T}\}, \{\mathtt{N}, +, -, *\}, \mathtt{E}, \mathtt{R_G})$$

$$\begin{aligned}\mathtt{R_G} = \{\ & \mathtt{E} \longrightarrow \mathtt{E} + \mathtt{F} \mid \mathtt{F} \\ & \mathtt{F} \longrightarrow \mathtt{F} * \mathtt{T} \mid \mathtt{T} \\ & \mathtt{T} \longrightarrow -\mathtt{T} \mid \mathtt{N} \mid (\mathtt{E})\}\end{aligned}$$

Lessico: Naturale (Identificatore)

$$\mathtt{H} = (\{\mathtt{L}, \mathtt{N}, \mathtt{D}\}, \{-, +, *, 0, \cdots, 9\}, \mathtt{L}, \mathtt{R_H})$$

$$\begin{aligned}\mathtt{R_H} = \{\ & \mathtt{L} \longrightarrow \mathtt{N} \mid * \mid - \mid + \\ & \mathtt{N} \longrightarrow \mathtt{D}\ \mathtt{N} \mid \mathtt{D} \\ & \mathtt{D} \longrightarrow 0 \mid 1 \mid \cdots \mid 9\}\end{aligned}$$

Riconosciamo la stringa, 13*-5+007$\in \mathcal{L}(<\mathtt{G},\mathtt{H}>)$.

Esercizi. 2.10-1

- **Esercizio 2.10.1**
  (a) Si completi la definizione di una grammatica le cui produzioni sono sotto.
  (b) Si mostri che la grammatica ottenuta è ambigua.

$$\mathtt{E} \longrightarrow \mathtt{T} \mid \mathtt{T} + \mathtt{E} \mid \mathtt{T} - \mathtt{E}$$
$$\mathtt{T} \longrightarrow \mathtt{A} \mid \mathtt{A} * \mathtt{E}$$

Soluzione
(a) $\mathtt{G} = \ldots$
(b) Consideriamo la stringa: $\mathtt{s} = \ldots$.
Mostriamo che esistono due diversi parse tree aventi $\mathtt{s}$ come frontiera.

Esercizi. 2.10-4

- **Esercizio 2.10.4**
  Si dia una grammatica non ambigua che generi tutte e sole le sequenze di parentesi angolate bilanciate

  Soluzione
  Definiamo $\mathtt{G} = (\{<, >\}, \{\mathtt{S}, \mathtt{B}\}, \mathtt{S}, \mathtt{R}_\mathtt{G})$, dove:
  $\mathtt{R}_\mathtt{G} = \{...\}$

Esercizi. 2.10-5

- **Esercizio 2.10.5**
  Si chiama lineare una grammatica le cui produzioni hanno la forma $\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{t}\ \mathtt{B}$ oppure $\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{t}$, dove $\mathtt{A}$, $\mathtt{B}$ siano non terminali e $\mathtt{t}$ sia un terminale o ϵ. Un linguaggio che può essere espresso con una grammatica lineare si chiama *regolare* e può essere riconosciuto da un automa a stati finiti. Si mostri che il linguaggio $\mathtt{L} = \{\mathtt{a}^{\mathtt{n}}\mathtt{b}^{\mathtt{m}} \mid \mathtt{n}, \mathtt{m} \geq 1\}$ è regolare.

  Soluzione
  Definiamo $\mathtt{G} = (\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{\mathtt{S}, \mathtt{B}\}, \mathtt{S}, \mathtt{R}_{\mathtt{G}})$, dove:
  $\mathtt{R}_{\mathtt{G}} = \{...\}$

Esercizi. 2.10-5bis

- **Esercizio 2.10.5bis**
  Si dia una grammatica non ambigua per che il linguaggio $\mathtt{L} = \{\mathtt{a}^{\mathtt{n}}\mathtt{b}^{\mathtt{m}} \mid \mathtt{n} \leq \mathtt{m}\}$.

  Soluzione
  Definiamo $\mathtt{G} = (\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{\mathtt{S}, \mathtt{B}\}, \mathtt{S}, \mathtt{R}_{\mathtt{G}})$, dove:
  $\mathtt{R}_{\mathtt{G}} = \{...\}$

Esercizi: Parse Tree

- **Parse Tree in C**
  Si dia, in C, una implementazione per Parse Tree di una grammatica. In particolare si forniscano:
  (a) una rappresentazione per tali alberi;
  (b) le operazioni per manipolare tali alberi in accordo alla relazione deriva.

  Soluzione
  (a) Dobbiamo fornire definizioni struct adeguate.
  (b) Dobbiamo includere un'operazione:
  Replace(t,p,s,t') che se l'albero t al cammino p ha un nodo foglia e questo nodo è etichettato s, allora modifica t sostituendo la foglia al cammino p con l'albero t'. In caso contrario segnale una "anomalia".
  Find(t,s) che visita l'albero t alla ricerca di una foglia etichettata s. Produce un cammino p ad una tale foglia o altrimenti un cammino vuoto.
  E poi abbiamo bisogno di valori per rappresentare ... e operazioni su tali valori