Sistema di Tipi Y di Small21

- **Sintassi Concreta**
  $\texttt{Type} ::= \texttt{Simple} \mid \texttt{void} \mid \texttt{Simple [Num]}$
  $\texttt{Simple} ::= \texttt{int} \mid \texttt{bool}$

- **Sintassi Astratta ed Espressioni di Tipo**
  $\texttt{Type} ::= \texttt{[int]} \mid \texttt{[bool]} \mid \texttt{[lab]} \mid \texttt{[void]} \mid \texttt{[arr] Type Num}$
  $\mid \texttt{[mut] Type} \mid \texttt{[abs] Type TypeSeq} \mid \texttt{[terr]}$

- **Regole: Una Regola di $\texttt{Y}_{\texttt{DCL}^{\texttt{Small21}}}$**

$$\frac{\langle \texttt{e}, \texttt{Y}_\rho \rangle \rightarrow_{\texttt{Y}} (\texttt{t}', \texttt{Y}_\rho) \qquad \texttt{t}' \neq \texttt{[terr]} \qquad \texttt{t}' = \texttt{t}}{\langle \texttt{[const] t I e}, \texttt{Y}_\rho \rangle \rightarrow_{\texttt{Y}} (\texttt{Void}, \texttt{[I/t]} \circ \texttt{Y}_\rho)}$$

Sono inferenze di un **Sistema Deduttivo** che associa ad ogni struttura del programma, s, con tipi degli identificatori definiti da $\texttt{Y}_\rho$, una coppia $(\texttt{t}', \texttt{Y}'_\rho)$. Sopra, nella premessa della regola, nella formula:

$$\langle \texttt{e}, \texttt{Y}_\rho \rangle \rightarrow_{\texttt{Y}} (\texttt{t}', \texttt{Y}_\rho)$$

vediamo ciò. In particolare, la regola è applicabile quando il sistema ha dedotto che l'espressione e, dove i suoi identificatori liberi hanno tipi tutti legati in $\texttt{Y}_\rho$, abbia tipo $\texttt{t}'$ (i.e. $\texttt{t}' = \texttt{t}$). Ovvero:

$$\texttt{Y}_\rho \vdash \texttt{e} : \texttt{t}.$$

Nella conclusione della regola sopra, la struttura di programma s è:

$$\texttt{[const] t I e}.$$

Quando la regola è applicabile allora il sistema è in grado di inferire

$$\langle \texttt{s}, \texttt{Y}_\rho \rangle \rightarrow_{\texttt{Y}} (\texttt{Void}, \texttt{[I/t]} \circ \texttt{Y}_\rho)$$

ovvero il sistema deduce che la struttura s è/introduce una corretta dichiarazione che estende in modo consistente $\texttt{Y}_\rho$ con il binding [I/t]. Ovvero:

$$\texttt{Y}_\rho, \texttt{I} : \texttt{t} \vdash \texttt{s} : \texttt{Void}.$$

Sistema di Tipi: Regole, Strutture e Proprietà di Y

$$\frac{\langle \mathtt{e}, \mathtt{Y}_\rho \rangle \rightarrow_{\mathtt{Y}} (\mathtt{t}', \mathtt{Y}_\rho) \qquad \mathtt{t}' \neq [\mathtt{terr}] \qquad \mathtt{t}' = \mathtt{t}}{\langle [\mathtt{const}]\ \mathtt{t}\ \mathtt{I}\ \mathtt{e}, \mathtt{Y}_\rho \rangle \rightarrow_{\mathtt{Y}} (\mathtt{Void}, [\mathtt{I}/\mathtt{t}] \circ \mathtt{Y}_\rho)}$$

- **Regole.** Sono inferenze di un sistema deduttivo che associano ad ogni struttura del programma, s, con tipi degli identificatori definiti da $\mathtt{Y}_\rho$, una coppia $(\mathtt{t}', \mathtt{Y}'_\rho)$.

  Sopra, in premessa $\langle \mathtt{e}, \mathtt{Y}_\rho \rangle \rightarrow_{\mathtt{Y}} (\mathtt{t}', \mathtt{Y}_\rho)$ vediamo ciò. In particolare, il sistema ha dedotto che l'espressione e, dove i suoi identificatori liberi siano tutti legati in $\mathtt{Y}_\rho$, abbia tipo $\mathtt{t}' = \mathtt{t}$. Ovvero: $\mathtt{Y}_\rho \vdash \mathtt{e} : \mathtt{t}$.
  Sopra, nella conclusione, la struttura di programma s è: $[\mathtt{const}]\ \mathtt{t}\ \mathtt{I}\ \mathtt{e}$. Quando il sistema è in grado di inferire $\langle \mathtt{s}, \mathtt{Y}_\rho \rangle \rightarrow_{\mathtt{Y}} (\mathtt{Void}, [\mathtt{I}/\mathtt{t}] \circ \mathtt{Y}_\rho)$ allora il sistema ha dedotto che la struttura s introduce una corretta dichiarazione che estende in modo consistente $\mathtt{Y}_\rho$ con il binding $[\mathtt{I}/\mathtt{t}]$. Ovvero: $\mathtt{Y}_\rho, \mathtt{I} : \mathtt{t} \vdash \mathtt{s} : \mathtt{Void}$.

- **Identificatori.** Tutti gli identificatori introdotti nel programma hanno un tipo t (definito da un'espressione di tipo del linguaggio). Questo tipo è associato all'identificatore nell'ambiente $\mathtt{Y}_\rho$ come il binding dell'identificatore in $\mathtt{Y}_\rho$.

- **Struttura $\mathtt{Y}_\rho$.** È una struttura di ambiente con le stesse operazioni viste per gli ambienti di denotazioni. In un Linguaggio a blocchi, l'applicazione di Y in differenti blocchi di un programma richiede che $\mathtt{Y}_\rho$ sia uno stack $> \rho :: \mathtt{Y}'_\rho]$ di ambienti senza ripetizioni con ρ ambiente del corrente blocco e $\mathtt{Y}'_\rho$ lo stack di ambienti (uno per ogni blocco attraversato fino al corrente) creati staticamente dal sistema Y.

- **Completezza** di Y richiede che il sistema sia dotato di un insieme di regole tali che: L'applicazione di Y ad ogni programma (sintatticamente corretto e legale) P, nell'ambiente $\mathtt{Y}_\mathtt{L}$, contenente i binding per tutti e soli gli identificatori di primitive del Linguaggio, sia in grado di fornire una e una sola derivazione di tipi ovvero un albero dove ogni nodo è la conclusione di una regola e i figli sono le premessa di tale regola sotto una stessa istanza di simboli della regola con strutture di P. L'albero così ottenuto ha:

  - radice: $\langle \mathtt{P}, \mathtt{Y}_\mathtt{L} \rangle \rightarrow_{\mathtt{Y}} (\mathtt{Void}, \mathtt{Y}_\mathtt{L})$. Ovvero: $\mathtt{Y}_\mathtt{L} \vdash \mathtt{P} : \mathtt{Void}$
  - discendenti: Per ogni termine s contenuto in P, $\langle \mathtt{s}, \mathtt{Y}_\rho \rangle \rightarrow_{\mathtt{Y}} (\mathtt{t}', \mathtt{Y}'_\rho)$. Ovvero: $\mathtt{Y}_\mathtt{L}, \mathtt{Y}_\rho \vdash \mathtt{s} : \mathtt{t}$

- **Ben tipato** in Y, è ogni termine (costrutto) s di ogni programma P (sintatticamente corretto e legale) che abbia una derivazione di tipi con radice come sopra e con discendenti come sopra e tali che $\mathtt{t} \neq [\mathtt{terr}]$.

Sistema di Tipi: Regole, Strutture e Proprietà di Y - 2

$$\frac{\Gamma_1 \quad \ldots \quad \Gamma_n}{\langle s, Y_\rho \rangle \rightarrow_Y (t, Y'_\rho)}$$

- **Stato di Stuck** in un Linguaggio con un sistema di tipi Y, è ogni stato inconsistente rispetto a Y. Definiamo inconsistente ogni stato che contiene:
  - **binding** tra un identificatore di tipo `t1` e un valore (denotabile o memorizzabile) di tipo `t2`, con `t1` $\neq$ `t2`;
  - **valore atteso**, in qualche componente di un qualche AR (inclusi buffer di I/O), di tipo `t1` e un valore calcolato di tipo `t2`, con `t1` $\neq$ `t2`

  Ogni Linguaggio tipato ha una propria struttura di stato che include sempre l'ambiente dei bindings degli identificatori (introdotti nel programma), ρ, lo stack di AR e, secondo i casi, una (o più per heap, per variabili statiche) memoria μ per valori modificabili e ogni altra struttura (buffer di I/O, tabella delle classi, tabella dei moduli,..) che debba far parte dello stato. Il sistema di tipi provvede esplicitamente a definire la consistenza per la struttura di stato dello specifico Linguaggio tipato.
- **Stato NonStuck** in un Linguaggio con un sistema di tipi Y, è ogni stato che soddisfa la consistenza richiesta da Y.
- **Correttezza (Safety)** di Y richiede che esso sia definito in accordo alla semantica del Linguaggio garantendo le due proprietà sotto:
  - **Progress**: Ogni termine ben tipato `s` (avente $Y_\rho \vdash s : t$) o è esso stesso un valore di tipo `t`[1] che occorre in uno stato NonStuck, oppure in accordo alla semantica la computazione contiene un successivo stato;
  - **Preservation**: Se `s` nel successivo stato è stato rimpiazzato con s' allora anche s' è ben tipato ed anche per esso vale $Y_\rho \vdash s' : t$
- **Theorem Completezza+Correttezza (locale)** Ogni Linguaggio tipato con sistema di tipi Completo e Safe è tale che tutti i suoi programmi ben tipati hanno computazioni prive di stati di Stuck.

[1] Ad ogni tipo è associato un insieme di valori non vuoto. Il tipo Void contiene il solo valore: `void`

Sistema Y: Regole per DCL

$$[\text{Y1}]\ \frac{\langle \mathtt{e}, \mathtt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\mathtt{Y}} (\mathtt{t}', \mathtt{Y}_\rho) \qquad \mathtt{t} \in \mathtt{Simple} \qquad \mathtt{t}' = \mathtt{t} \qquad \mathtt{Y}_\rho = {>}\rho :: \mathtt{Y}'_\rho] \qquad \rho(\mathtt{I}) = \bot \qquad {>}[\mathtt{I}/\mathtt{t}] \circ \rho :: \mathtt{Y}'_\rho] = \mathtt{Y}''_\rho}{\langle [\mathtt{const}]\ \mathtt{t}\ \mathtt{I}\ \mathtt{e}, \mathtt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\mathtt{Y}} ([\mathtt{void}], \mathtt{Y}''_\rho)}$$

$$[\text{Y2}]\ \frac{\langle \mathtt{e}, \mathtt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\mathtt{Y}} (\mathtt{t}', \mathtt{Y}_\rho) \qquad \mathtt{t} \in \mathtt{Simple} \qquad \mathtt{t}' = \mathtt{t} \qquad \mathtt{Y}_\rho|_0(\mathtt{I}) = \bot}{\langle [\mathtt{var}]\ \mathtt{t}\ \mathtt{I}\ \mathtt{e}, \mathtt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\mathtt{Y}} ([\mathtt{void}], [\mathtt{I}/[\mathtt{mut}]\ \mathtt{t}] \otimes \mathtt{Y}_\rho)}$$

Gestione Errori di Tipo:

$$[\text{E1}]\ \frac{\mathtt{t} \notin \mathtt{Simple}}{\langle [\mathtt{const}]\ \mathtt{t}\ \mathtt{I}\ \mathtt{e}, \mathtt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\mathtt{Y}} ([\mathtt{terr}], \mathtt{Y}_\rho)} \qquad [\text{E2}]\ \frac{\langle \mathtt{e}, \mathtt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\mathtt{Y}} (\mathtt{t}', \mathtt{Y}_\rho) \quad \mathtt{t}' \neq \mathtt{t}}{\langle [\mathtt{const}]\ \mathtt{t}\ \mathtt{I}\ \mathtt{e}, \mathtt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\mathtt{Y}} ([\mathtt{terr}], \mathtt{Y}_\rho)}$$

$$[\text{E3}]\ \frac{\mathtt{Y}_\rho|_0(\mathtt{I}) \neq \bot}{\langle [\mathtt{const}]\ \mathtt{t}\ \mathtt{I}\ \mathtt{e}, \mathtt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\mathtt{Y}} ([\mathtt{terr}], \mathtt{Y}_\rho)}$$

$$[\text{E4}]\ \frac{\mathtt{t} \notin \mathtt{Simple}}{\langle [\mathtt{var}]\ \mathtt{t}\ \mathtt{I}\ \mathtt{e}, \mathtt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\mathtt{Y}} ([\mathtt{terr}], \mathtt{Y}_\rho)} \qquad [\text{E5}]\ \frac{\langle \mathtt{e}, \mathtt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\mathtt{Y}} (\mathtt{t}', \mathtt{Y}_\rho) \qquad \mathtt{t}' \neq \mathtt{t}}{\langle [\mathtt{var}]\ \mathtt{t}\ \mathtt{I}\ \mathtt{e}, \mathtt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\mathtt{Y}} ([\mathtt{terr}], \mathtt{Y}_\rho)}$$

$$[\text{E6}]\ \frac{\mathtt{Y}_\rho|_0(\mathtt{I}) \neq \bot}{\langle [\mathtt{var}]\ \mathtt{t}\ \mathtt{I}\ \mathtt{e}, \mathtt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\mathtt{Y}} ([\mathtt{terr}], \mathtt{Y}_\rho)}$$

Notazione: Simboli e Strutture

- ${>}\rho :: \mathtt{Y}_\rho]$, stack non vuoto di ambienti di legami `[I/t]`, avente ρ come top e $\mathtt{Y}_\rho$ come stack residuo.
- $\mathtt{Y}_\rho|_{\mathtt{n}}$, n-esimo (`n>=0`) ambiente precedente il top dello stack $\mathtt{Y}_\rho$.
- $[\mathtt{I}/\mathtt{t}] \otimes \mathtt{Y}_\rho$, aggiunta del binding `[I/t]` nel top dello stack $\mathtt{Y}_\rho$.
- `N`, Intero; • `I` (anche con apici), Identificatore; • `t` (anche con apici), Tipo; • `e`, espressione.
- `Simple` $= \{[\mathtt{int}], [\mathtt{bool}]\}$

Sistema Y: Regole per DCL - 2

$$[\text{Y3}]\ \frac{}{\langle [\texttt{array}]\,\texttt{t}\,\texttt{I}\,\texttt{N}, \texttt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\texttt{Y}} (,)}\ **$$

$$[\text{Y4}]\ \frac{}{\langle \qquad\qquad \rangle \rightarrow_{\texttt{Y}} (\quad,\quad)}\ **$$

Gestione Errori di Tipo:

$$[\text{E7}]\ \frac{\texttt{t} \notin \texttt{Simple}}{\langle [\texttt{array}]\,\texttt{t}\,\texttt{I}\,\texttt{N}, \texttt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\texttt{Y}} ([\texttt{terr}], \texttt{Y}_\rho)} \qquad [\text{E8}]\ \frac{\texttt{N} <= 0}{\langle [\texttt{array}]\,\texttt{t}\,\texttt{I}\,\texttt{N}, \texttt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\texttt{Y}} ([\texttt{terr}], \texttt{Y}_\rho)}$$

$$[\text{E9}]\ \frac{\texttt{Y}_\rho|_0(\texttt{I}) \neq \bot}{\langle [\texttt{array}]\,\texttt{t}\,\texttt{I}\,\texttt{N}, \texttt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\texttt{Y}} ([\texttt{terr}], \texttt{Y}_\rho)}$$

$$[\text{E10}]\ \frac{\texttt{t} \notin \texttt{Simple} \cup \{[\texttt{void}]\}}{\langle [\texttt{pcd}]\,\texttt{t}\,\texttt{I}\,\texttt{F}\,\texttt{Bc}, \texttt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\texttt{Y}} ([\texttt{terr}], \texttt{Y}_\rho)} \qquad [\text{E11}]\ \frac{\texttt{F} = [\texttt{fp}]\,\texttt{p}\,\texttt{t}'\,\texttt{I}' \qquad \texttt{t}' \in \texttt{Simple}}{\langle [\texttt{pcd}]\,\texttt{t}\,\texttt{I}\,\texttt{F}\,\texttt{Bc}, \texttt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\texttt{Y}} ([\texttt{terr}], \texttt{Y}_\rho)}$$

$$[\text{E12}]\ \frac{\texttt{Y}_\rho|_0(\texttt{I}) \neq \bot}{\langle [\texttt{pcd}]\,\texttt{t}\,\texttt{I}\,\texttt{F}\,\texttt{Bc}, \texttt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\texttt{Y}} ([\texttt{terr}], \texttt{Y}_\rho)} \qquad [\text{E13}]\ \frac{\begin{array}{c}\texttt{F} = [\texttt{fp}]\,\texttt{p}\,\texttt{t}'\,\texttt{I}' \qquad [\texttt{I}'/\texttt{t}'] \circ [] = \rho \\ \langle \texttt{Bc}, > \rho :: \texttt{Y}_\rho]\rangle \rightarrow_{\texttt{Y}} ([\texttt{terr}], \texttt{Y}'_\rho)\end{array}}{\langle [\texttt{pcd}]\,\texttt{t}\,\texttt{I}\,\texttt{F}\,\texttt{Bc}, \texttt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\texttt{Y}} ([\texttt{terr}], \texttt{Y}_\rho)}$$

Notazione: Simboli e Strutture

- [], ambiente vuoto
- $> \rho :: \texttt{Y}_\rho]$, stack non vuoto di ambienti di legami [I/t], avente ρ come top e $\texttt{Y}_\rho$ come stack residuo.
- $\texttt{Y}_\rho|_\texttt{n}$, n-esimo (n>=0) ambiente precedente il top dello stack $\texttt{Y}_\rho$.
- $[\texttt{I}/\texttt{t}] \otimes \texttt{Y}_\rho$, aggiunta del binding [I/t] nel top dello stack $\texttt{Y}_\rho$.
- [abs] t [::] t′, Tipo di procedura e funzione;
- F, parametro formale; • Bc blocco di statements;

Sistema Y: Regole per EXP

$$\frac{}{\langle [\texttt{num}]\,\texttt{N}, \texttt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\texttt{Y}} ([\texttt{int}], \texttt{Y}_\rho)} \qquad \frac{}{\langle [\texttt{true}], \texttt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\texttt{Y}} ([\texttt{bool}], \texttt{Y}_\rho)} \qquad \frac{}{\langle [\texttt{false}]\ , \texttt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\texttt{Y}} ([\texttt{bool}], \texttt{Y}_\rho)}$$

$$\frac{\texttt{Y}_\rho(\texttt{I}) = [\texttt{mut}]\,\texttt{t} \qquad \texttt{t} \in \texttt{Simple}}{\langle [\texttt{val}]\,\texttt{I}, \texttt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\texttt{DY}} ([\texttt{mut}]\,\texttt{t}, \texttt{Y}_\rho)} \qquad \frac{\texttt{Y}_\rho(\texttt{I}) = [\texttt{mut}]\,\texttt{t} \qquad \texttt{t} \in \texttt{Simple}}{\langle [\texttt{val}]\,\texttt{I}, \texttt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\texttt{Y}} (\texttt{t}, \texttt{Y}_\rho)} \qquad \frac{\texttt{Y}_\rho(\texttt{I}) = \texttt{t} \qquad \texttt{t} \in \texttt{Simple}}{\langle [\texttt{val}]\,\texttt{I}, \texttt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\texttt{Y}} (\texttt{t}, \texttt{Y}_\rho)}$$

$$\frac{}{\langle \texttt{I}\ [\uparrow 1]\ \texttt{e}, \texttt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\texttt{DY}} ([\texttt{mut}]\,\texttt{t}, \texttt{Y}_\rho)}\ ** \qquad \frac{\begin{array}{c}\texttt{Y}_\rho(\texttt{I}) = [\texttt{arr}]([\texttt{mut}]\,\texttt{t})\,\texttt{N} \\ \langle \texttt{e}, \texttt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\texttt{Y}} ([\texttt{int}], \texttt{Y}_\rho) \qquad \texttt{t} \in \texttt{Simple} \\ \textit{InBoundDynamicCheck}\end{array}}{\langle \texttt{I}\ [\uparrow 1]\ \texttt{e}, \texttt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\texttt{Y}} (\texttt{t}, \texttt{Y}_\rho)}$$

$$\frac{}{\langle \texttt{e}_1\ [\texttt{op}]\ \texttt{e}_2, \texttt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\texttt{Y}} (\texttt{t}, \texttt{Y}_\rho)}\ ** \qquad \frac{\begin{array}{c}\langle \texttt{e}, \texttt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\texttt{Y}} (\texttt{t}_\texttt{e}, \texttt{Y}_\rho) \\ \texttt{Y}_\rho(\texttt{op}) = [\texttt{abs}]\,\texttt{t}[::]\texttt{t}' \qquad \texttt{op} \in \mathcal{O}_1 \\ \texttt{t}' = \texttt{t}_\texttt{e}\end{array}}{\langle [\texttt{op}]\,\texttt{e}, \texttt{Y}_\rho\rangle \rightarrow_{\texttt{Y}} (\texttt{t}, \texttt{Y}_\rho)}$$

Notazione

- $\rightarrow_{\texttt{DY}}$ è l'inferenza di Tipo del Valore Denotabile di espressioni con doppio significato.
- $\mathcal{O}_2 = \{+, ==, >, <, \texttt{or}\}$; $\mathcal{O}_1 = \{\}$.
- $\texttt{Simple} = \{[\texttt{int}], [\texttt{bool}]\}$

Sistema Y: Regole per EXP - Errori di tipo

Sistema Y: Regole per CMD, STM, PROG

Sistema Y: CMD, STM, PROG - Errori di tipo