Principi di Calcolabilità

Sommario: 25 febbraio, 2021

- Linguaggi di Programmazione: Cosa Sono? Perchè Esistono?
- Funzioni Calcolabili e Funzioni Parziali.
- Linguaggio, Programma, Algoritmo e Funzione Calcolabile
- Relazione tra L. di Programmazione e Funzioni Calcolabili
- Esercizi

Linguaggi di Programmazione: Cosa sono? Perchè Esistono?

- Rispondiamo mostrando che sono lo strumento di congiunzione tra alcune nozioni correlate che includono:
  Funzioni Calcolabili, Algoritmi, Computer Applications.

Definizione (Linguaggi di Programmazione LP)

Sono i **Formalismi** *con cui*
scrivere **formule**, *chiamate* **Programmi**, *per:*

- **Esprimere** *tutte*[a] *e* **solo** *le* Computer Applications
- **Definire tutte** *e* **solo** *le* Funzioni Calcolabili
- **Implementare** *gli* Algoritmi *e renderli* Processi Automatici

[a] Tesi di Church-Turing 1936, o tesi dell'equivalenza dei modelli di calcolo, M.Mirsky, Computation: Finite and Infinite Machines, 1972, pag.108-109

I Linguaggi di Programmazione sono i **Formalismi** per:

- **Esprimere** tutte e **solo** le *Computer Applications*:
  - *Computer Applications* sono tutte le applicazioni che:
    - *sono state*, *sono* e *saranno*[1] realizzabili in Processi Automatici (eseguibili oggi, su computers *isolati* e/o *interconnessi*)
    - *pervadono ogni comparto e attività* della nostra esistenza: Information, Production, Education, Research, Culture, Health...

- **Definire tutte** e **solo** le *Funzioni Calcolabili*, $\mathcal{F}$.

[1] **Trattabilità e Non Calcolabilità** in: Cooper, S.B., and Soskova, M.I, The Incomputable: Journey Beyond the Turing Barrier, Springer-Verlag, 2017

Linguaggi di Programmazione: *Funzioni Calcolabili*

I Linguaggi di Programmazione sono i **Formalismi** per:

- **Esprimere** tutte e **solo** *Computer Applications* ...
- **Definire tutte e solo** le *Funzioni Calcolabili*, $\mathcal{F}$.

Definizione (Funzioni Calcolabili $\mathcal{F}$)

Sia $\mathcal{D}$ insieme numerabile,

- $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathcal{D} \to \mathcal{D}] \subset \mathcal{D} \to \mathcal{D}$[a]
- *Continue*[b] *in Topologia di Scott:* $\mathcal{D} \cong$[c]$[\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$
- *definite*[d] *mediante* specifici formalismi, *che includono:*
  Combinatory Logic, λ-Calculus, Turing Machines, State Machines,..., **Linguaggi di Programmazione (LP)**

---

[a] $\mathcal{D} \to \mathcal{D}$ è l'insieme non numerabile contenente tutte le funzioni **Parziali** da $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}$

[b] $(\forall \mathtt{g} \in \mathcal{F}, \forall \mathtt{c} \in \mathcal{D}, \forall \sqcup \{\mathtt{c_i}\} \subset \mathcal{D})$ **Se** $\mathtt{c} \equiv \sqcup\{\mathtt{c_i}\}$ **Allora** $\mathtt{g(c)} = \mathtt{g}(\sqcup\{\mathtt{c_i}\}) = \sqcup(\mathtt{g(c_i)})$

[c] $\cong$ sta per *isomorfo*, vedi D.Scott, Continuous Lattices, Lecture Notes in Mathematics 274 (1972), 97-136

[d] "definite", qui, significa *finitamente, completamente definite.*

Funzioni Calcolabili: I Programmi sono Formule

A sinistra un **programma**, in Linguaggio C, definisce una funzione; A destra una **formula**, in notazione equazionale-algebrica, per la stessa funzione:

```
void main(){
  int n, ret = 1;
  scanf("%d",&n);
  if(n<0) ret = 0;
  while (n> 0){
        ret =* n;
        n--;}
  printf("%d",ret);
  }//Un programma P
```

`definisce e calcola`

$$fact_0(n) = \begin{cases} n! & \text{se } n>=0 \\ 0 & \text{se } n<0 \end{cases}$$

- Anche il programma P è una formula: Il linguaggio C è un **formalismo**;
- La formula a sinistra **definisce ed in aggiunta calcola, utilizzando una Macchina C**, la funzione $\texttt{fact}_0$ in ogni punto $\texttt{n}$ del dominio (degli interi di C);
- La formula a destra fornisce una definizione per $\texttt{fact}_0$ ma non è eseguibile su nessuna Macchina nota.

Formalismo, Linguaggio di Programmazione

Anticipiamo alcune fondamentali nozioni che saranno riprese e approfondite nel corso.

Definizione (Formalismo)

Un Formalismo è definito da una **Sintassi** *e da una* **Semantica***. Esso consiste nell'insieme di tutte le formule aventi una forma che soddisfa la Sintassi e il significato assegnato a ciascuna formula dalla Semantica*

Esempio.

Aritmetica di Peano;
Logica dei Predicati;
Teoria degli Insiemi di Cantor;
Linguaggio di Programmazione;

Definizione (Linguaggio di Programmazione)

Un Linguaggio di Programmazione $\mathcal{L}$ è un formalismo $<\mathcal{P}_\mathcal{L}, [|\_|]_\mathcal{L}>$ che definisce tutte e solo le Funzioni Calcolabili, $\mathcal{F}$.
La **Sintassi** $\mathcal{P}_\mathcal{L}$ *fissa la forma di ogni programma.*
La **Semantica** $[|\_|]_\mathcal{L}$ *associa ad ogni programma la Funzione Calcolabile da esso definita.*

Esempio. Riprendiamo la situazione di prima:

```
void main(){
   int n, ret = 1;
   scanf("%d",&n);
   if(n<0) ret = 0;
   while (n> 0){
         ret =* n;
         n--;}
   printf("%d",ret);
   }//Un programma P
```

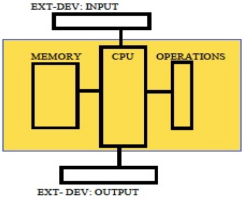
`definisce e calcola` $\quad \mathrm{fact}_0(\mathrm{n}) = \begin{cases} \mathrm{n}! & \text{se n>=0} \\ 0 & \text{se n<0} \end{cases}$

Nel linguaggio C, Sintassi e Semantica siano $\mathcal{P}_\mathcal{C}$, $[|\_|]_\mathcal{C}$. Allora:

$$\mathtt{P} \in \mathcal{P}_\mathcal{C}, \qquad [|\mathtt{P}|]_\mathcal{C} = \mathtt{fact}_0$$

Definizione (Macchina Astratta ed Esecutore di Programmi)

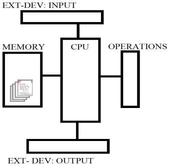
Una Macchina Astratta $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ è un modello di calcolo (Hardware e/o Software) costituito da una coppia $<\mathcal{L},\mathcal{E}_{\mathcal{L}}>$.
$\mathcal{L}$ è un Linguaggio di Programmazione, detto Linguaggio Macchina*.*
$\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ è un esecutore dei programmi di $\mathcal{L}$ che calcola in accordo alla semantica di $\mathcal{L}$.



- In giallo: La tipica Macchina Astratta di un LP a basso livello (espressivo, es. Linguaggio Assembly)
- Ogni LP ha una propria Macchina Astratta il cui esecutore fornisce una **realizzazione astratta/concreta del modello di calcolo** utilizzato per calcolare i programmi di LP.
- La Macchina Astratta puó mostrare anche le **apparecchiature esterne con cui comunica**.

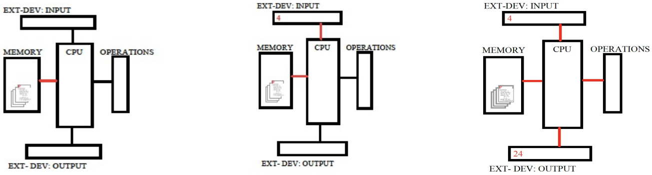
Macchina Astratta: $\mathcal{L}, \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$

```
void main(){
   int n, ret = 1;
   scanf("%d",&n);
   if(n<0) ret = 0;
   while (n> 0){
         ret =* n;
         n--;}
   printf("%d",ret);
   }//Un programma P
```



- Sinistra. Un programma del **Linguaggio C** (il programma P già visto prima)
- Centro. Il programma è contenuto in uno o più files e rappresentato in **Sintassi Astratta** o altro equiv.
- Destra. **Una Macchina Astratta** per **C**
    - Un Linguaggio può avere più di una Macchina Astratta:
    - Tutte però tra loro equivalenti rispetto alla Semantica del Linguaggio.
    - In particolare, i diversi esecutori forniscono stesso comportamento ad uno stesso programma.
    - Il programma per essere eseguito deve risiedere in Memoria,
    - e le unità che lo compongono, sono selezionate singolarmente ed interpretate dalla CPU.

Macchina Astratta: Vediamola nella pratica.



- Sinistra. AM inizia l'esecuzione del programma P:
  In rosso la comunicazione degli STm di P, selezionati singolarmente e trasmessi in sequenza;
- Centro. AM legge dall'input:
  In rosso le comunicazioni per:
  - la selezione dello STm `scanf(...)`
  - e la lettura dal buffer di input di un intero da assegnare alla variabile `n`.
- Destra. AM scrive sull'output:
  In rosso le comunicazioni per:
  - la selezione dello STm `while(...)` e della sua esecuzione che coinvolge:
    - operazioni per il confronto, prodotto e decremento
    - il meccanismo di iterazione di STm
  - e la selezione dello STm `print(...)` che coinvolge:
    - la scrittura sul buffer di output dell'ultimo intero assegnato a `ret`

Funzioni Calcolabili: Calcolo Non Terminante

A sinistra un **programma**, in C, che definisce una funzione il cui calcolo è Non Terminante su alcuni punti del dominio:
A destra una **formulazione** equazionale-algebrica:

```
void main(){
  int n, ret = 1;
  scanf("%d",&n);
  while (n != 0){
        ret *= n;
        n--;}
  printf("%d",ret);
  }
```

`definisce e calcola` $fact_{\perp}(n) = \begin{cases} n! & \text{se } n>=0 \\ \perp & \text{se } n<0 \end{cases}$

- La funzione definita dal programma è (strettamente) Parziale:
  - è **non-terminante** sui negativi;
  - è **indefinita** sui negativi;
  - è **divergente** sui negativi;
  - **vale** $\perp$ (indefinito) sui negativi.

Funzioni Calcolabili: Funzioni Parziali (e Totali)

Definizione (Funzioni Parziali su $\mathcal{D}$: $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$)

Sono funzioni che possono essere non definite su alcuni punti del dominio $\mathcal{D}$.
Include le Totali, definite su tutti i punti.

- fact_0 e $\text{fact}_\perp$: Condividono **Struttura del Dominio** $\mathcal{D}$ (i.e quella dei **Valori** del Linguaggio C);
- È un problema di **Terminazione del Calcolo della funzione definita**
- Esistono Totali che si sanno calcolare solo utilizzando Parziali

Esempio (Funzioni Parziali)

Una stream (illimitata) di interi da leggere fino ai primi due contigui uguali ...

```
void main(){
    int last, curr;
    scanf("%d",&last);
    scanf("%d",&curr);
    while(last!=curr){last=curr; scanf("%d",curr);}
    printf("%d",curr);
}
```

Leggerà due contigui uguali? Cos'è una stream in $\mathcal{D}$? Si consideri Esercizio L1.10

Linguaggi di Programmazione: La Funzione Universale

I Linguaggi di Programmazione sono i **Formalismi** per:

- **Esprimere** tutte e **solo** *Computer Applications*...
- **Definire tutte e solo** le *Funzioni Calcolabili*, $\mathcal{F}$

Definizione (Linguaggio di Programmazione $\mathcal{L}$ $\in$ LP)

Sia $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$ *l'insieme delle funzioni calcolabili.*
Sia $\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} <\mathcal{P}_{\mathcal{L}}, [|\_|]_{\mathcal{L}}> \in$ **LP**, *un Linguaggio di Programmazione.*
Allora,

- *Meaning.* $[|\_|]_{\mathcal{L}} : \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \to \mathcal{F}$ *suriettiva*
- *Representation.* $\exists\ ^{-} : \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \to \mathcal{D} \in \mathcal{F}$ *iniettiva* [a]
- *Universal.* $\exists \mathcal{U}_{\mathcal{L}} \in \mathcal{F}$ `such that:`
  - $(\forall \mathrm{p} \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}})\quad \mathcal{U}_{\mathcal{L}}(\overline{\mathrm{p}}) = \mathrm{g} \in (\mathcal{D} \cong [\mathcal{D} \to \mathcal{D}] \equiv)\ \mathcal{F}$
  - $\forall \mathrm{g} \in \mathcal{F}$, $\exists \mathrm{p} \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$, *such that:*
    - $\mathrm{g} = [|\mathrm{p}|]_{\mathcal{L}}$
    - $\mathcal{U}_{\mathcal{L}}(\overline{\mathrm{p}})(\mathrm{x}) = \mathrm{g}(\mathrm{x}) \quad \forall \mathrm{x} \in \mathcal{D}$

[a] scrivendo $\overline{p} \in \mathcal{D}$ per $^{-}(\mathrm{p})$, $\forall p \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$

Funzione Universale $\mathcal{U}_{\mathcal{L}}$, dato un LP $\mathcal{L}$

Cosa Significa e Cosa Implica l'esistenza di questa funzione $\mathcal{U}_{\mathcal{L}}$?

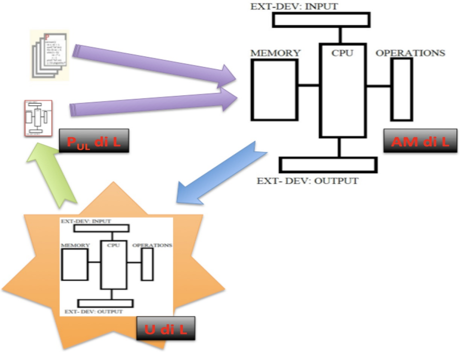
- $\forall \mathcal{L} \in$ **LP**, $\exists \mathcal{U}_{\mathcal{L}} \in \mathcal{F}$,
- $\forall \mathrm{p} \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$, $\mathcal{U}_{\mathcal{L}}(\overline{\mathrm{p}}) = \mathrm{g} \in (\mathcal{D} \cong [\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}] \equiv)\ \mathcal{F}$

Ogni Linguaggio di Programmazione $\mathcal{L}$ ha una propria Funzione Universale $\mathcal{U}_{\mathcal{L}}$ che:

- È calcolabile,
- Applicata ad ogni programma (opportunamente rappresentato in $\mathcal{D}$) p di $\mathcal{L}$ calcola la funzione calcolabile definita da p in $\mathcal{L}$.

Funzione Universale $\mathcal{U}_\mathcal{L}$: Riflessione di $\mathcal{L}$

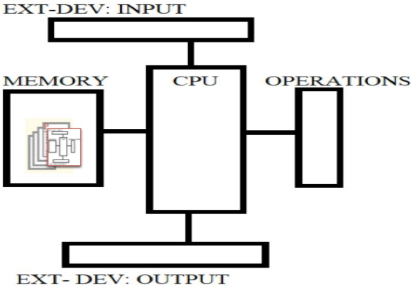
Ogni Linguaggio di Programmazione ha tra i suoi Programmi una Immagine di Se Stesso (della propria AM).



- **Blue.** Dalla AM alla Funzione Calcolabile $\mathcal{U}_\mathcal{L}$.
- **Verde.** Dalla $\mathcal{U}_\mathcal{L}$ ad un Programma $\mathtt{P}_{\mathcal{U}_\mathcal{L}}$ di $\mathcal{L}$ che definisce $\mathcal{U}_\mathcal{L}$ implementando lo Stesso Comportamento Computazionale di AM: Calcola la stessa sequenza sequenza di Stati calcolata da AM, dato un programma di $\mathcal{L}$..
- Viola. Carichiamo in AM anche $\mathtt{P}_{\mathcal{U}_\mathcal{L}}$:

Una Lista di $\mathtt{AM}_{\mathcal{L}}$ con Riflessione

Ogni Linguaggio di Programmazione ha tra i suoi Programmi una Immagine di Se Stesso e del Comportamento Computazionale della sua AM.



Una sola Immagine? - No, almeno tante quante le differenti AM che possiamo scrivere in $\mathcal{L}$ per $\mathcal{L}$ stesso.

Relazione tra $\mathcal{F}$ e **LP**

Definizione (Relazione tra $\mathcal{F}$ e **LP**)

- $\mathcal{F} \equiv [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$, $\mathcal{L} \in$ **LP**
  - *(Universale)* $\exists \mathcal{U} \in \mathcal{F}$,
  - *(Meaning)* $\exists\, [|\_|] : \mathcal{P} \to \mathcal{F}$, *suriettiva,*
  - $\forall \mathrm{p} \in \mathcal{P}$[a],

    $$\mathcal{U}(\overline{\mathrm{p}}) = \mathrm{g} \in (\mathcal{D} \cong [\mathcal{D} \to \mathcal{D}] \equiv)\ \mathcal{F}$$
  - $\forall \mathrm{g} \in \mathcal{F}, \exists \mathrm{p} \in \mathcal{P}$:

    $$\mathcal{U}(\overline{\mathrm{p}})(\mathrm{x}) = \mathrm{g}(\mathrm{x}) \quad \forall \mathrm{x} \in \mathcal{D}$$

dove:
$\mathcal{D}$ *numerabile,* $[\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$ *funzioni continue su* $\mathcal{D} \to \mathcal{D}$ *con topologia di Scott* (quindi, $\mathcal{D} \cong [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$), $\mathcal{P}$ *insieme programmi di* $\mathcal{L}$, $^{-} : \mathcal{P} \to \mathcal{D}$ *iniettiva.*

[a] $\mathcal{P}$ dipende da $\mathcal{L}$, e scriveremo estesamente $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ quando più linguaggi $\mathcal{L}$ sono considerati e potrebbe esserci ambiguità. Analogamente, è la funzione universale $\mathcal{U}$ di $\mathcal{L}$, e il mapping suriettivo $[|\_|]$

Linguaggi di Programmazione: A cosa servono? /4

Gli **Strumenti Formali, Fondamentali** (che introducono strutture finite: I Programmi) per:

- **Esprimere** tutte e **solo** le *Computer Applications*

  ...
- **Definire tutte e solo** le *Funzioni Calcolabili* $\mathcal{F}$.

  ...
- **Implementare** gli *Algoritmi* di calcolo e renderli *Processi Automatici*

  —— Nella prossima Lezione

Esercizi L1

1. Scrivere (ed eseguire) un programma C che definisca un tipo A per l'unione disgiunta di int, char, e coppie di un int ed un char, ed una procedura con intestazione A pair(A x, A y) che calcola la coppia $(\mathtt{v_x}, \mathtt{v_y})$ se il valore di x è un int $\mathtt{v_x}$ ed il valore di y è un char $\mathtt{v_y}$, altrimenti calcola 0.
2. Se e dove, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo che $\mathcal{F}$ è numerabile.
3. Se e dove, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo che la funzione $[|\_|]$ è calcolabile. E se si, cosa calcola.
4. Se e dove, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo che $\mathcal{P}$ contiene un programma che calcola $[|\_|]$.
5. Se e quale relazione, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo tra l'iniettiva $^- : \mathcal{P} \to \mathcal{D}$ e la suriettiva $[|\_|]$.
6. Se e dove, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo che per ogni funzione calcolabile c'è un programma che la calcola.
7. Se e dove, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo che ogni linguaggio di programmazione definisce tutte e solo le funzioni calcolabili.
8. Se e dove, nella formulazione $\mathcal{F}$, vediamo che $[|\_|]$ stabilisce una corrispondenza uno-uno tra $\mathcal{P}$ e $\mathcal{F}$.
9. Facendo riferimento all'esercizio 1 sopra. Si commenti la funzione calcolata dal programma scritto, in particolare si dica: Quali sono i valori del numerabile $\mathcal{D}$? Cosa sono le sequenze rispetto a tali valori? Cos'è in $\mathcal{F}$ un ordinamento di tali sequenze?
10. In un esempio dei lucidi abbiamo usato il termine stream ad indicare una struttura dati in grado di fornire un'illimitata sequenza di valori. Come potrebbe essere definita una tale struttura in termini di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{D}$?