Cenni di programmazione ricorsiva

Appunti per gli studenti di Programmazione I e Laboratorio
(corsi A-B)

Corso di Laurea in Informatica
Università di Pisa
A.A. 2009/10

R. Barbuti, P. Mancarella

Indice

1 Definizioni Ricorsive **3**
1.1 Il Teorema di Ricorsione 4
1.2 Esempi di applicazione del teorema di ricorsione 11
1.3 Applicazione del teorema di ricorsione alle grammatiche libere 12
1.4 Grafici di funzioni 15

1 Definizioni Ricorsive

Nel paradigma funzionale siamo interessati alla definizione di funzioni, eventualmente ricorsive, per la risoluzione di problemi. In effetti, molti problemi di calcolo possono essere formulati ricorsivamente in modo naturale. Un esempio tipico è la seguente definizione della funzione fattoriale, dai naturali nei naturali:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n * (n-1)! & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Un altro esempio è la definizione della successione dei numeri di Fibonacci:

$$\begin{array}{lcl} f_0 & = & 1 \\ f_1 & = & 1 \\ f_n & = & f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{per } n \geq 2 \end{array}$$

Anche nella definizione sintattica di linguaggi attraverso l'uso di grammatiche si utilizzano definizioni ricorsive. Ad esempio, nella grammatica:

```
<S> ::= ab | a<S>b
```

la seconda produzione è ricorsiva, in quanto definisce le stringe generate dalla categoria sintattica `<S>` in termini della categoria sintattica `<S>` stessa.

Un altro esempio sono definizioni ricorsive di insiemi. Prendiamo la seguente equazione

$$\mathcal{P} \quad = \quad \{0\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge (n-2) \in \mathcal{P}\}$$

Cosa possiamo dire sull'insieme definito da questa equazione?

(1) dal primo operando di $\cup$ concludiamo $0 \in \mathcal{P}$

(2) dal secondo operando concludiamo anche $2 \in \mathcal{P}$, essendo $2 - 2 = 0$ e sapendo $0 \in \mathcal{P}$ da (1)

(3) analogamente concludiamo anche $4 \in \mathcal{P}$, e così via.

In pratica siamo in grado di *costruire* insiemi via via più grandi:

$$\begin{array}{l} \{0\} \\ \{0, 2\} \\ \{0, 2, 4\} \\ \{0, 2, 4, 6\} \\ \ldots \end{array}$$

fino ad ottenere, in un numero infinito di iterazioni del procedimento descritto, l'insieme dei numeri pari.

Un risultato fondamentale, noto come *teorema di ricorsione*, garantisce che definizioni ricorsive come le precedenti sono ben formulate, ovvero è possibile associare ad esse un significato univoco. Una discussione approfondita del teorema di ricorsione esula dagli scopi del corso di Programmazione I e Laboratorio. Tuttavia, ricordiamo qui di seguito l'intuizione alla base di tale risultato con l'ausilio di esempi.

1.1 Il Teorema di Ricorsione

Per semplicità, ci concentriamo sul significato di definizioni ricorsive di insiemi: vedremo poi come, in realtà, anche una definizione di funzione ricorsiva si possa ricondurre alla definizione ricorsiva di un insieme (il *grafico* della funzione stessa). In generale, una definizione ricorsiva di insieme è un'equazione del tipo

$$X = \mathcal{T}(X)$$

dove $\mathcal{T}$ è una trasformazione da insiemi in insiemi.

Consideriamo, ad esempio, la seguente trasformazione che, dato un insieme di numeri naturali restituisce un insieme di numeri naturali:

$$\mathcal{T}(X) = \{0\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \land (n-2) \in X\}$$

Applicando, ad esempio, la trasformazione $\mathcal{T}(\cdot)$ all'insieme $\{3, 9, 4\}$, otteniamo:

$$\begin{array}{ll}
 & \mathcal{T}(\{3,9,4\}) \\
= & \qquad \{ \text{ definizione di } \mathcal{T}(\cdot) \ \} \\
 & \{0\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \land (n-2) \in \{3,9,4\}\} \\
= & \qquad \{ \ (n-2) \in \{3,9,4\} \text{ se e solo se } n = 5 \lor n = 11 \lor n = 6 \ \} \\
 & \{0\} \cup \{5,6,11\} \\
= & \qquad \{ \text{ unione insiemistica } \} \\
 & \{0,5,6,11\}
\end{array}$$

A partire dalla trasformazione $\mathcal{T}(\cdot)$ possiamo ottenere la seguente definizione ricorsiva di un insieme di numeri naturali

$$X = \{0\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \land (n-2) \in X\} \tag{1}$$

Il problema che ci poniamo è come determinare una soluzione di un'equazione ricorsiva su insiemi come la (1).

Nel caso di definizioni *ricorsive* che definiscono numeri reali, il calcolo analitico ci mette a disposizione dei metodi per la risoluzione di equazioni analoghe. Data, ad esempio, la seguente funzione dai reali nei reali

$$f(x) = 2x - 4$$

l'equazione

$$x = f(x)$$

non è altro che un'equazione di primo grado la cui (unica) soluzione è data da $x = 4$.

In generale, data un'equazione ricorsiva su insiemi $X = \mathcal{T}(X)$ vogliamo stabilire se essa ammette una soluzione, ovvero determinare un insieme che sia *invariante* rispetto alla trasformazione $\mathcal{T}(\cdot)$. Un insieme siffatto viene detto *punto fisso* della trasformazione $\mathcal{T}(\cdot)$.

Esempio 1.1. Consideriamo la funzione $\mathcal{T} : \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$ così definita:

$$\mathcal{T}(X) = \mathbb{N} \setminus X$$

dove $\setminus$ è l'operazione di differenza insiemistica[1]. È facile convincersi che non esiste soluzione all'equazione ricorsiva

$$X = \mathcal{T}(X)$$

[1] Dati due insiemi A e B, $A \setminus B$ è l'insieme di tutti e soli gli elementi di A che non sono elementi di B.

ovvero che la trasformazione $\mathcal{T}(\cdot)$ non ammette punti fissi.
Consideriamo ora la trasformazione

$$add1(X) = X \cup \{1\}.$$

Anche in questo caso è facile convincersi che un qualunque insieme Y con $1 \in Y$ è un punto fisso di $add1$ e dunque una soluzione dell'equazione ricorsiva

$$X = add1(X).$$

Ne concludiamo che $add1$ ammette *infiniti* punti fissi.
Consideriamo infine la trasformazione

$$\mathcal{P}(X) = \{0\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge (n-2) \in X\}$$

L'insieme dei numeri naturali pari è chiaramente un punto fisso di $\mathcal{P}$. ■

Gli esempi precedenti mostrano che equazioni ricorsive del tipo $X = \mathcal{T}(X)$ possono non ammettere punti fissi, o ammetterne più d'uno (anche infiniti). Il problema è allora quello di studiare in quali situazioni le nostre equazioni ricorsive ammettono punti fissi e, in caso affermativo, individuarne uno come *la* soluzione *canonica* dell'equazione.

Il teorema di ricorsione garantisce che, se la trasformazione $\mathcal{T}(\cdot)$ gode di certe proprietà, ammette almeno un punto fisso e fornisce altresì un modo per calcolare il *minimo punto fisso*, che può essere dunque preso come l'insieme definito dall'equazione ricorsiva. L'apparato formale richiesto nel caso generale è piuttosto complesso ed esula dagli scopi di queste note: ci limitiamo qui a vedere il teorema di ricorsione nel solo caso di equazioni ricorsive su insiemi.

Sia allora A un insieme[2] e sia $\mathbb{P}_A$ l'insieme delle sue parti, ovvero l'insieme che contiene tutti i possibili sottoinsiemi di A. Sia $\mathcal{T}(\cdot)$ una trasformazione che mappa elementi di $\mathbb{P}_A$ in elementi di $\mathbb{P}_A$.

Definizione 1.1. (Monotonia e Continuità)
Una trasformazione $\mathcal{T} : \mathbb{P}_A \longrightarrow \mathbb{P}_A$ si dice:

(a) *monotona* se, presi $X, Y \in \mathbb{P}_A$, con $X \subseteq Y$, si ha $\mathcal{T}(X) \subseteq \mathcal{T}(Y)$.

(b) *continua* se, presa una qualunque sequenza (eventualmente infinita)

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \ldots \subseteq X_i \subseteq X_{i+1} \ldots$$

con $X_i \in \mathbb{P}_A$ per ogni $i \geq 0$, si ha

$$\mathcal{T}(\bigcup_{i\geq 0} X_i) = \bigcup_{i\geq 0} \mathcal{T}(X_i).$$

Vediamo alcuni esempi di trasformazioni su insiemi di naturali e studiamone monotonia e continuità.

[2] L'insieme A deve essere numerabile e in queste note sarà spesso l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.

Esempio 1.2. Consideriamo di nuovo la funzione

$$add1 : \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$$

definita da

$$add1(X) = X \cup \{1\}$$

che aggiunge l'elemento 1 al suo argomento. Ad esempio

$$add1(\{0,4,2\}) = \{0,4,2\} \cup \{1\} = \{0,4,2,1\}$$

e

$$add1(\{1,4,2\}) = \{1,4,2\} \cup \{1\} = \{1,4,2\}.$$

Mostriamo che $add1$ è monotona. Siano $X, Y \in \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$ con $X \subseteq Y$. Abbiamo:

$$\begin{array}{lll} & add1(X) & \\ = & & \{ \text{ definizione di } add1 \text{ } \} \\ & X \cup \{1\} & \\ \subseteq & & \{ \text{ Ipotesi } X \subseteq Y \text{ e proprietà di } \cup \text{ } \} \\ & Y \cup \{1\} & \\ = & & \{ \text{ definizione di } add1 \text{ } \} \\ & add1(Y) & \end{array}$$

Mostriamo ora anche la continuità di $add1$. Sia

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \ldots \subseteq X_i \subseteq X_{i+1} \ldots$$

una sequenza non decrescente di insiemi di numeri naturali. Abbiamo:

$$\begin{array}{lll} & \bigcup_{i \geq 0} add1(X_i) & \\ = & & \{ \text{ definizione di } add1 \text{ } \} \\ & \bigcup_{i \geq 0} \big(X_i \cup \{1\} \big) & \\ = & & \{ \text{ Proprietà di } \cup \text{ } \} \\ & \{1\} \cup \big(\bigcup_{i \geq 0} X_i \big) & \\ = & & \{ \text{ definizione di } add1 \text{ } \} \\ & add1\big(\bigcup_{i \geq 0} X_i \big) & \end{array}$$

■

Vediamo ora un esempio di funzione non monotona.

Esempio 1.3. Sia $\mathcal{T} : \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$ definita da

$$\mathcal{T}(X) = \begin{cases} \{\} & \text{se } \#X \geq 2 \\ X & \text{se } \#X < 2 \end{cases}$$

dove con la notazione $\#A$ indichiamo la cardinalità (ovvero il numero di elementi) di A. Consideriamo gli insiemi $\{0\} \subseteq \{0,1,2\}$. Abbiamo:

$$
\begin{array}{ll}
& \mathcal{T}(\{0\}) \\
= & \qquad\qquad \{ \text{ definizione di } \mathcal{T}(\cdot)\text{, essendo } \#\{0\} = 1 \text{ } \} \\
& \{0\}
\end{array}
$$

e

$$
\begin{array}{ll}
& \mathcal{T}(\{0,1,2\}) \\
= & \qquad\qquad \{ \text{ definizione di } \mathcal{T}(\cdot)\text{, essendo } \#\{0,1,2\} = 3 \text{ } \} \\
& \{\}
\end{array}
$$

Dunque $\{0\} \subseteq \{0,1,2\}$ ma $\mathcal{T}(\{0\}) \not\subseteq \mathcal{T}(\{0,1,2\})$ e quindi la trasformazione non è monotona. ■

Consideriamo infine una funzione monotona ma non continua.

Esempio 1.4. Sia $\mathcal{F} : \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$ definita da

$$
\mathcal{F}(X) = \begin{cases} \{\} & \text{se } X \text{ è un insieme finito} \\ \{1\} & \text{se } X \text{ è un insieme infinito} \end{cases}
$$

È facile vedere che $\mathcal{F}(\cdot)$ è monotona. Consideriamo la sequenza

$$
X_i = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq i\} \quad \text{con } i \geq 0
$$

In altre parole

$$
\begin{array}{rcl}
X_0 & = & \{0\} \\
X_1 & = & \{0,1\} \\
X_2 & = & \{0,1,2\} \\
& \vdots &
\end{array}
$$

e dunque $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots$. È evidente che

$$
\bigcup_{i \geq 0} X_i = \mathbb{N}
$$

e quindi

$$
\mathcal{F}(\bigcup_{i \geq 0} X_i) = \{1\}.
$$

D'altra parte, per ciascun $i \geq 0$, si ha $\mathcal{F}(X_i) = \{\}$ e dunque

$$
\bigcup_{i \geq 0} \mathcal{F}(X_i) = \{\},
$$

da cui concludiamo che $\mathcal{F}(\cdot)$ non è continua. ■

Un primo importante risultato è il seguente teorema che mostra come ogni funzione continua sia anche monotona.

Teorema 1.1. Sia $\mathcal{T} : \mathbb{P}_A \longrightarrow \mathbb{P}_A$ una funzione continua. Allora $\mathcal{T}(\cdot)$ è monotona.

Dimostrazione. Prendiamo $X_1, X_2 \in \mathbb{P}_A$ con $X_1 \subseteq X_2$. Abbiamo:

$\mathcal{T}(X_1) \cup \mathcal{T}(X_2)$

$=$ { definizione di $\bigcup$ }

$\bigcup_{i=1,2} \mathcal{T}(X_i)$

$=$ { continuità di $\mathcal{T}(\cdot)$ }

$\mathcal{T}(\bigcup_{i=1,2} X_i)$

$=$ { definizione di $\bigcup$ }

$\mathcal{T}(X_1 \cup X_2)$

$=$ { Ipotesi $X_1 \subseteq X_2$ }

$\mathcal{T}(X_2)$

Ma $\big(\mathcal{T}(X_1) \cup \mathcal{T}(X_2)\big) = \mathcal{T}(X_2)$ implica $\mathcal{T}(X_1) \subseteq \mathcal{T}(X_2)$. □

Mostriamo ora che l'operazione di unione è una funzione continua.

Teorema 1.2. Sia $Y \in \mathbb{P}_A$. La funzione $\mathcal{F}_Y : \mathbb{P}_A \longrightarrow \mathbb{P}_A$ definita da

$$\mathcal{F}_Y(X) = X \cup Y$$

è continua.

Dimostrazione. Sia $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots$ una sequenza di insiemi di $\mathbb{P}_A$. Allora:

$\bigcup_{i\geq 0} \mathcal{F}_Y(X_i)$

$=$ { definizione di $\mathcal{F}_Y$ }

$\bigcup_{i\geq 0} \big(X_i \cup Y\big)$

$=$ { proprietà di $\cup$ }

$\big(\bigcup_{i\geq 0} X_i\big) \cup Y$

$=$ { definizione di $\mathcal{F}_Y(\cdot)$ }

$\mathcal{F}_Y\big(\bigcup_{i\geq 0} X_i\big)$

□

Siano $\mathcal{F} : \mathbb{P}_A \longrightarrow \mathbb{P}_A$ e $\mathcal{G} : \mathbb{P}_A \longrightarrow \mathbb{P}_A$ due funzioni. La funzione composta $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} : \mathbb{P}_A \longrightarrow \mathbb{P}_A$ è così definita:

$$(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(X) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(X)).$$

È facile convincersi che la composizione di funzioni continue è essa stessa una funzione continua.

Teorema 1.3. La composizione di due funzioni continue è una funzione continua.

Dimostrazione. Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due funzioni continue. Consideriamo la sequenza

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots$$

Abbiamo

$$\mathcal{F}(\mathcal{G}(\bigcup_{i\geq 0} X_i))$$

$=$ { continuità di $\mathcal{G}$ }

$$\mathcal{F}(\bigcup_{i\geq 0} \mathcal{G}(X_i))$$

$=$ { monotonia di $\mathcal{G}$, continuità di $\mathcal{F}$ }

$$\bigcup_{i\geq 0} \mathcal{F}(\mathcal{G}(X_i))$$

$\square$

Torniamo al nostro problema di partenza che è quello di determinare l'esistenza o meno di soluzioni, ovvero punti fissi, di equazioni ricorsive su insiemi del tipo $X = \mathcal{T}(X)$ e veniamo al teorema fondamentale.

Data una trasformazione $\mathcal{T} : \mathbb{P}_A \longrightarrow \mathbb{P}_A$ ed un insieme $A \in \mathbb{P}_A$, con $\mathcal{T}^i(A)$, $i \geq 0$, indichiamo la composizione di $\mathcal{T}$ con sé stessa i volte, ovvero

$$\mathcal{T}^i(A) = \underbrace{\mathcal{T}(\mathcal{T}(\mathcal{T}(\ldots \mathcal{T}(A)\ldots)))}_{i \text{ volte}}$$

Per convenzione, assumeremo $\mathcal{T}^0(A) = A$. Ad esempio

$$\mathcal{T}^2(A) = \mathcal{T}(\mathcal{T}(A))$$

Teorema 1.4. (**Teorema di Ricorsione**)
Sia $X = \mathcal{T}(X)$ un'equazione ricorsiva con $\mathcal{T} : \mathbb{P}_A \longrightarrow \mathbb{P}_A$. Se $\mathcal{T}(\cdot)$ è continua allora:

(a) l'insieme $I = \bigcup_{i\geq 0} \mathcal{T}^i(\{\})$ è un punto fisso di $\mathcal{T}(\cdot)$

(b) per ogni altro punto fisso J di $\mathcal{T}(\cdot)$, si ha $I \subseteq J$.

L'insieme I è detto il *minimo punto fisso* della trasformazione $\mathcal{T}(\cdot)$.

Prima di dimostrare il teorema di ricorsione, riflettiamo sul suo enunciato. Il punto (a) non solo garantisce che, nel caso di trasformazioni continue, un punto fisso esiste, ma ci dà anche un modo per costruirlo. Inoltre, il punto (b) ci garantisce che qualunque altro punto fisso è un sovrainsieme del punto fisso costruito in (a) e dunque quest'ultimo può essere preso come la soluzione canonica dell'equazione ricorsiva definita da $X = \mathcal{T}(X)$.

La dimostrazione del teorema di ricorsione si basa, tra l'altro, sul seguente Lemma.

Lemma 1.5. Sia $\mathcal{T} : \mathbb{P}_A \longrightarrow \mathbb{P}_A$ una trasformazione continua. Allora

$$\mathcal{T}^i(\{\}) \subseteq \mathcal{T}^{i+1}(\{\}), \quad \text{per ogni } i \geq 0.$$

Dimostrazione. Dimostriamo l'asserto per induzione.
Passo base
Per $i = 0$ abbiamo

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathcal{T}^0(\{\}) \\
= & \qquad \{ \text{ definizione di } \mathcal{T}^i \text{ } \} \\
 & \{\} \\
\subseteq & \qquad \{ \text{ } \{\} \subseteq A, \text{ per ogni insieme } A \text{ } \} \\
 & \mathcal{T}(\{\}) \\
= & \qquad \{ \text{ definizione di } \mathcal{T}^i \text{ } \} \\
 & \mathcal{T}^1(\{\})
\end{array}
$$

Passo induttivo
Supponiamo vero $\mathcal{T}^n(\{\}) \subseteq \mathcal{T}^{n+1}(\{\})$ e dimostriamo $\mathcal{T}^{n+1}(\{\}) \subseteq \mathcal{T}^{n+2}(\{\})$.

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathcal{T}^{n+1}(\{\}) \\
= & \qquad \{ \text{ definizione di } \mathcal{T}^i \text{ } \} \\
 & \mathcal{T}(\mathcal{T}^n(\{\})) \\
\subseteq & \qquad \{ \text{ per l'ipotesi induttiva e la monotonia di } \mathcal{T} \text{ } \} \\
 & \mathcal{T}(\mathcal{T}^{n+1}(\{\})) \\
= & \qquad \{ \text{ definizione di } \mathcal{T}^i \text{ } \} \\
 & \mathcal{T}^{n+2}(\{\})
\end{array}
$$

□

Si noti che il Lemma mostra che, al crescere di i, gli insiemi $\mathcal{T}^i(\{\})$ sono approssimazioni sempre migliori del minimo punto fisso.

Veniamo alla dimostrazione del teorema di ricorsione.

Dimostrazione. (del Teorema 1.4)
(a) Dimostriamo dapprima che l'insieme

$$I = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}^i(\{\})$$

è un punto fisso di $\mathcal{T}(\cdot)$. Abbiamo:

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathcal{T}(I) \\
= & \qquad \{ \text{ definizione di } I \text{ } \} \\
 & \mathcal{T}(\bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}^i(\{\})) \\
= & \qquad \{ \text{ per continuità di } \mathcal{T}(\cdot) \text{ } \} \\
 & \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}(\mathcal{T}^i(\{\})) \\
= & \qquad \{ \text{ per definizione di } \mathcal{T}^i(\cdot) \text{ } \} \\
 & \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}^{i+1}(\{\}) \\
= & \\
 & \bigcup_{i \geq 1} \mathcal{T}^i(\{\}) \\
= & \qquad \{ \text{ } \{\} \cup A = A \text{ per ogni } A \text{ } \} \\
 & \{\} \cup \bigcup_{i \geq 1} \mathcal{T}^i(\{\}) \\
= & \qquad \{ \text{ } \{\} = \mathcal{T}^0(\{\}) \text{ } \} \\
 & \mathcal{T}^0(\{\}) \cup \bigcup_{i \geq 1} \mathcal{T}^i(\{\})
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
= & & \\
& \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}^i(\{\}) & \\
= & & \{ \text{ definizione di } I \text{ } \} \\
& I &
\end{array}
$$

Mostriamo ora che I è il minimo punto fisso. Sia J un punto fisso di $\mathcal{T}(\cdot)$, ovvero $J = \mathcal{T}(J)$. Mostriamo per induzione che:

$$\mathcal{T}^i(\{\}) \subseteq J, \text{per ogni } i \geq 0$$

Passo base
Per $i = 0$ abbiamo

$$
\begin{array}{lll}
& \mathcal{T}^0(\{\}) & \\
= & & \{ \text{ definizione di } \mathcal{T}^i \text{ } \} \\
& \{\} & \\
\subseteq & & \{ \text{ } \{\} \subseteq J, \text{ per ogni insieme } J \text{ } \} \\
& J &
\end{array}
$$

Passo induttivo
Supponiamo vero $\mathcal{T}^n(\{\}) \subseteq J$ e dimostriamo $\mathcal{T}^{n+1}(\{\}) \subseteq J$.

$$
\begin{array}{lll}
& \mathcal{T}^{n+1}(\{\}) & \\
= & & \{ \text{ definizione di } \mathcal{T}^i \text{ } \} \\
& \mathcal{T}(\mathcal{T}^n(\{\})) & \\
\subseteq & & \{ \text{ per l'ipotesi induttiva e la monotonia di } \mathcal{T} \text{ } \} \\
& \mathcal{T}(J) & \\
= & & \{ \text{ per ipotesi } J \text{ è punto fisso di } \mathcal{T}(\cdot) \text{ } \} \\
& J &
\end{array}
$$

A questo punto è facile dimostrare che $I \subseteq J$. Infatti:

$$
\begin{array}{lll}
& I & \\
= & & \{ \text{ definizione di } I \text{ } \} \\
& \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}^i(\{\}) & \\
\subseteq & & \{ \text{ per ogni } i, \mathcal{T}^i(\{\}) \subseteq J \text{ } \} \\
& \text{J} &
\end{array}
$$

□

1.2 Esempi di applicazione del teorema di ricorsione

In questa sezione vediamo alcune applicazioni del teorema di ricorsione a definizioni ricorsive di insiemi.

Esempio 1.5. Consideriamo di nuovo l'equazione dell'esempio 1

$$X = \{0\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \land (n-2) \in X\} \tag{2}$$

ovvero l'equazione $X = \mathcal{P}(X)$, dove $\mathcal{P}$ è la trasformazione:

$$\mathcal{P}(X) = \{0\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \land (n-2) \in X\}$$

Indichiamo per semplicità con P^i l'insieme $\mathcal{P}^i(\{\})$, ovvero l'$i-$esima approssimazione del minimo punto fisso soluzione dell'equazione, e calcoliamo le prime approssimazioni che ci derivano dall'applicazione del teorema di ricorsione.

$$\begin{array}{rcl}
P^0 & = & \mathcal{P}^0(\{\}) = \{\} \\
\\
P^1 & = & \mathcal{P}(\mathcal{P}^0(\{\})) = \mathcal{P}(P^0) = \\
& = & \{0\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge (n-2) \in \{\}\} = \\
& = & \{0\} \cup \{\} = \{0\} \\
\\
P^2 & = & \mathcal{P}(\mathcal{P}^1(\{\})) = \mathcal{P}(P^1) = \\
& = & \{0\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge (n-2) \in P^1\} = \\
& = & \{0\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge (n-2) \in \{0\}\} = \{0, 2\} \\
\\
P^3 & = & \mathcal{P}(\mathcal{P}^2(\{\})) = \mathcal{P}(P^2) = \\
& = & \{0\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge (n-2) \in \{0, 2\}\} = \\
& = & \{0, 2, 4\} \\
& \ldots &
\end{array}$$

È facile convincersi che

$$P^i \quad = \quad \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \exists k < i.\ n = 2 * k\}$$

Consideriamo ora l'equazione

$$X = add1(X)$$

dove $add1(X) = X \cup \{1\}$ è la funzione continua vista nell'esempio 1.2. Osserviamo che un qualunque insieme di numeri che contiene $\{1\}$ è un punto fisso dell'equazione. Calcoliamone il minimo mediante approssimazioni successive.

$$\begin{array}{rcl}
X^0 & = & \{\} \\
\\
X^1 & = & add1(\{\}) = \{\} \cup \{1\} = \{1\} \\
\\
X^2 & = & add1(X^1) = add1(\{1\}) = \{1\} \cup \{1\} = \{1\}
\end{array}$$

Dunque $X^2 = add1(X^2)$ è il minimo punto fisso cercato e viene preso come *la* soluzione dell'equazione ricorsiva. Si noti che in questo caso la costruzione del minimo punto fisso ci consente di determinarlo in un numero finito di iterazioni del procedimento suggerito dal teorema di ricorsione. ■

1.3 Applicazione del teorema di ricorsione alle grammatiche libere

Il teorema di ricorsione può essere utilizzato anche per dare significato alle definizioni di linguaggi mediante grammatiche libere. L'idea consiste nell'interpretare le produzioni di una grammatica come definizioni ricorsive.

Per fare ciò introduciamo dapprima l'operazione di concatenazione tra linguaggi.

Definizione 1.2. (Concatenazione di linguaggi)
Siano $L, L' \subseteq \Lambda^*$ due linguaggi. La *concatenazione* di L e L', denotata da LL' è il linguaggio

$$LL' = \{\alpha\beta \ \mid \ \alpha \in L \wedge \beta \in L'\}$$

dove $\alpha\beta$ è la stringa ottenuta concatenando le stringhe α e β.

Osserviamo che vale la seguente proprietà,

$$L\{\} = \{\}L = \{\}$$

ovvero la concatenazione di un linguaggio col linguaggio vuoto dà origine al linguaggio vuoto.

Vediamo allora come interpretare le produzioni di una grammatica come equazioni su linguaggi.

- ogni simbolo terminale `a` viene interpretato come il linguaggio $\{\mathtt{a}\}$;
- ogni simbolo non terminale `A` viene interpretato come variabile sui linguaggi;
- una sequenza di simboli viene interpretata come *concatenazione* dei linguaggi corrispondenti ai simboli stessi.
- il simbolo $|$ viene interpretato come l'operazione di unione $\cup$
- il simbolo $\longrightarrow$ (ovvero `::=`) viene interpretato come l'uguaglianza

Un esempio aiuta a chiarire la costruzione.

Esempio 1.6. Consideriamo la seguente grammatica

```
S ::= ab | aSb
```

L'equazione ricorsiva che otteniamo è la seguente

$$S = \{\mathtt{a}\}\{\mathtt{b}\} \cup \{\mathtt{a}\}S\{\mathtt{b}\}$$

che può essere riscritta come

$$S = \{\mathtt{ab}\} \cup \{\mathtt{a}\}S\{\mathtt{b}\}$$

■

L'esempio mostra come da un insieme di produzioni di una grammatica si possa costruire un'equazione ricorsiva[3] del tipo

$$S = \mathcal{T}(S) \tag{3}$$

dove $\mathcal{T}$ è una trasformazione da linguaggi in linguaggi, ottenuta mediante le operazioni di unione e concatenazione (oltre che mediante composizione di funzioni). Nell'esempio precedente la trasformazione ottenuta è

$$\mathcal{T}(X) = \{\mathtt{ab}\} \cup \{\mathtt{a}\}X\{\mathtt{b}\}$$

[3]Come vedremo più avanti si ottiene in generale un *sistema* di equazioni ricorsive, tante quante sono le categorie sintattiche della grammatica di partenza.

Poiché unione e concatenazione di linguaggi sono operazioni continue (così come la composizione di funzioni continue come già visto), abbiamo la possibilità di utilizzare il teorema di ricorsione per ottenere la soluzione di una equazione come la (3).

Torniamo al nostro esempio e, denotando al solito con S^i l'insieme $\mathcal{T}^i(\{\})$, calcoliamo le prime approssimazioni del minimo punto fisso dell'equazione ottenuta. Abbiamo:

$$\begin{array}{rcl}
S^0 & = & \{\} \\
\\
S^1 & = & \mathcal{T}(\{\}) = \{\mathtt{ab}\} \cup \{\mathtt{a}\}\{\}\{\mathtt{b}\} = \{\mathtt{ab}\} \\
\\
S^2 & = & \mathcal{T}(S^1) = \{\mathtt{ab}\} \cup \{\mathtt{a}\}S^1\{\mathtt{b}\} = \{\mathtt{ab}, \mathtt{aabb}\} \\
\\
S^3 & = & \mathcal{T}(S^2) = \{\mathtt{ab}\} \cup \{\mathtt{a}\}S^2\{\mathtt{b}\} = \{\mathtt{ab}, \mathtt{aabb}, \mathtt{aaabbb}\}
\end{array}$$

È facile vedere che

$$S^i = \{\mathtt{a}^k b^k \ \mid \ k \leq i\}$$

e dunque che il minimo punto fisso è:

$$\bigcup_{i \geq 0} S^i = \{a^n b^n \ \mid \ n > 0\}$$

Consideriamo ora una grammatica libera che utilizza più categorie sintattiche.

Esempio 1.7. Sia G la seguente grammatica

```
S ::= a | aS | B
B ::= b | bB
```

Dalla trasformazione vista otteniamo il seguente *sistema* di equazioni ricorsive

$$\begin{array}{rcl}
S & = & \{\mathtt{a}\} \cup \{\mathtt{a}\}S \cup B \\
B & = & \{\mathtt{b}\} \cup \{\mathtt{b}\}B
\end{array}$$

In questo caso le trasformazioni in gioco sono due:

$$\begin{array}{rcl}
S & = & \mathcal{T}_S(S, B) \\
B & = & \mathcal{T}_B(S, B)
\end{array}$$

Osserviamo che, in questo caso particolare, la trasformazione $\mathcal{T}_B$ non fa alcun uso del suo primo argomento: tuttavia, nel caso generale, le variabili in gioco sono quelle corrispondenti a tutte le categorie sintattiche della grammatica.

Il teorema di ricorsione si estende al caso di sistemi di equazioni ricorsive: calcoliamo le approssimazioni del minimo punto fisso nel nostro esempio.

$$
\begin{array}{rcl}
S^0 & = & \{\} \\
B^0 & = & \{\} \\
\\
S^1 & = & \mathcal{T}_S(\{\},\{\}) = \{\mathtt{a}\} \cup \{\mathtt{a}\}\{\} \cup \{\} = \{\mathtt{a}\} \\
B^1 & = & \mathcal{T}_B(\{\},\{\}) = \{\mathtt{b}\} \cup \{\mathtt{b}\}\{\} = \{\mathtt{b}\} \\
\\
S^2 & = & \mathcal{T}_S(S^1,B^1) = \{\mathtt{a}\} \cup \{\mathtt{a}\}S^1 \cup B^1 = \{\mathtt{a},\mathtt{aa},\mathtt{b}\} \\
B^2 & = & \mathcal{T}_B(S^1,B^1) = \{\mathtt{b}\} \cup \{\mathtt{b}\}B^1 = \{\mathtt{b},\mathtt{bb}\} \\
\\
S^3 & = & \mathcal{T}_S(S^2,B^2) = \{\mathtt{a}\} \cup \{\mathtt{a}\}S^2 \cup B^2 = \{\mathtt{a},\mathtt{aa},\mathtt{aaa},\mathtt{ab},\mathtt{b},\mathtt{bb}\} \\
B^3 & = & \mathcal{T}_B(S^2,B^2) = \{\mathtt{b}\} \cup \{\mathtt{b}\}B^2 = \{\mathtt{b},\mathtt{bb},\mathtt{bbb}\} \\
\\
 & \ldots &
\end{array}
$$

■

1.4 Grafici di funzioni

Una qualunque funzione

$$f : A \longrightarrow B$$

può essere rappresentata mediante il suo *grafico*, ovvero l'insieme di coppie G_f, sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$, così definito:

$$G_f = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge y = f(x)\}$$

Una definizione ricorsiva di funzione porta ad una definizione ricorsiva del suo grafico. Vediamo un esempio.

Esempio 1.8. Consideriamo la funzione fattoriale dai naturali nei naturali.

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n * (n-1)! & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Il suo grafico è allora il seguente insieme di coppie di naturali

$$G_! = \underbrace{\{(0,1)\} \cup \{(n,m) \mid n > 0 \wedge m = n * m' \wedge (n-1,m') \in G_!\}}_{\mathcal{T}}$$

Si tratta, di nuovo, di un'equazione ricorsiva del tipo $X = \mathcal{T}(X)$ di cui calcoliamo la soluzione determinando il minimo punto fisso della trasformazione $\mathcal{T}(\cdot)$.

$$
\begin{aligned}
G_!^0 &= \{\} \\[1em]
G_!^1 &= \mathcal{T}(G_!^0) = \{(0,1)\} \cup \big\{(n,m) \mid n > 0 \land m = n * m' \land (n-1, m') \in \{\}\big\} = \\
&= \{(0,1)\} \cup \{\} = \{(0,1)\} \\[1em]
G_!^2 &= \mathcal{T}(G_!^1) = \{(0,1)\} \cup \big\{(n,m) \mid n > 0 \land m = n * m' \land (n-1, m') \in \{(0,1)\}\big\} = \\
&= \{(0,1)\} \cup \big\{(n,m) \mid n > 0 \land m = n * m' \land n - 1 = 0 \land m' = 1\big\} = \\
&= \{(0,1)\} \cup \big\{(n,m) \mid n = 1 \land m = 1 * 1\big\} = \{(0,1), (1,1)\} \\[1em]
G_!^3 &= \mathcal{T}(G_!^2) = \{(0,1)\} \cup \big\{(n,m) \mid n > 0 \land m = n * m' \land (n-1, m') \in \{(0,1), (1,1)\}\big\} = \\
&= \{(0,1)\} \cup \big\{(n,m) \mid n > 0 \land m = n * m' \land \big((n-1 = 0 \land m' = 1) \lor (n-1 = 1 \land m' = 1)\big)\big\} = \\
&= \{(0,1)\} \cup \{(1,1), (2,2)\} = \{(0,1), (1,1), (2,2)\} \\[1em]
G_!^4 &= \mathcal{T}(G_!^3) = \{(0,1)\} \cup \big\{(n,m) \mid n > 0 \land m = n * m' \land (n-1, m') \in \{(0,1), (1,1), (2,2)\}\big\} = \\
&= \{(0,1)\} \cup \{(1,1), (2,2), (3,6)\} = \{(0,1), (1,1), (2,2), (3,6)\} \\[1em]
& \quad \ldots
\end{aligned}
$$

Dunque dalle prime approssimazioni del grafico concludiamo che

$$0! = 1 \qquad 1! = 1 \qquad 2! = 2 \qquad 3! = 6$$

■

Il teorema di ricorsione ci garantisce dunque l'esistenza di una soluzione di equazioni ricorsive che definiscono funzioni, ma non ci garantisce nulla circa la "bontà" di tali soluzioni.

Esempio 1.9. Consideriamo la seguente funzione dai naturali nei naturali

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 1 + f(x+1) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ed il suo grafico

$$F = \underbrace{\{(1,1)\} \cup \{(x,y) \mid y = 1 + y' \land (x+1, y') \in F\}}_{\mathcal{T}}$$

Calcoliamone la soluzione come minimo punto fisso di $\mathcal{T}(\cdot)$.

$$
\begin{aligned}
F^0 &= \{\} \\
\\
F^1 &= \mathcal{T}(F^0) = \{(1,1)\} \cup \big\{(x,y) \mid y = 1 + y' \wedge (x+1, y') \in \{\}\big\} = \\
&= \{(1,1)\} \\
\\
F^2 &= \mathcal{T}(F^1) = \{(1,1)\} \cup \big\{(x,y) \mid y = 1 + y' \wedge (x+1, y') \in \{(1,1)\}\big\} = \\
&= \{(1,1),(0,2)\} \\
\\
F^3 &= \mathcal{T}(F^2) = \{(1,1)\} \cup \big\{(x,y) \mid y = 1 + y' \wedge (x+1, y') \in \{(1,1),(0,2)\}\big\} = \\
&= \{(1,1),(0,2)\} = F^2
\end{aligned}
$$

Abbiamo così ottenuto che l'insieme $\{(1,1),(0,2)\}$ è il minimo punto fisso della trasformazione $\mathcal{T}(\cdot)$ e dunque la funzione f è tale che:

$$
f(n) = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 0 \\ 1 & \text{se } n = 1 \\ \text{indefinita} & \text{altrimenti} \end{cases}
$$

■

Nell'esempio, il punto fisso esiste ma non è una funzione *totale* sul suo dominio. Ricordiamo che una funzione

$$g : A \longrightarrow B$$

si dice *totale* se calcola un valore per ciascun elemento del suo dominio, ovvero se

$$\forall x \in A. \big(\exists y \in B. y = f(x)\big)$$

È chiaro che, di solito, siamo interessati alla definizione di funzioni totali: come abbiamo appena visto, il teorema di ricorsione ci garantisce l'esistenza di soluzioni di definizioni ricorsive di funzioni, ma nulla ci dice circa il fatto che tali soluzioni siano o meno funzioni totali.