# Teorema di ricorsione

Presa $T: \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ continua

a) $I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\})$ è un punto fisso di $T$.

(è una soluzione della equaz. ricorsiva $x = T(x)$)

b) per ogni altro punto fisso, $J$, di $T$ (cioè $J = T(J)$) abbiamo $I \subseteq J$

(il punto fisso $I$ è il minimo punto fisso)

---

$T: \mathbb{P}_\mathbb{N} \to \mathbb{P}_\mathbb{N}$

$$T(X) = \{0\} \cup \{n \mid n-2 \in X\}$$

$$\boxed{X = T(X)}$$

un punto fisso di $T$ è l'insieme dei numeri naturali pari.

# Principio di induzione naturale

Se ho una proprietà P, sui numeri naturali

Se riesco a dimostrare

- $P(\emptyset)$ caso base
- $\forall n \in \mathbb{N}.\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$ caso induttivo

allora la proprietà vale su tutto $\mathbb{N}$

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ P(n)$$

$$\left( \underline{P(\emptyset)} \wedge \underline{\left( \forall n \in \mathbb{N}.\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \right)} \right) \Rightarrow \left( \forall n \in \mathbb{N}.\ P(n) \right)$$

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

$$\frac{n+1}{2}$$

$0, 1, 2, \ldots \qquad 98, 99, 100$

$$P(n) \equiv \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ P(n)$$

ovvero

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}.\ \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}}$$

- $P(0) \equiv \sum_{i=0}^{0} i = \frac{0\cdot(0+1)}{2}$ caso base

$\cancel{\forall n \in \mathbb{N}.}\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$ caso induttivo

$\equiv$

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \Rightarrow \sum_{i=0}^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

## Caso base (ovvio)

$$\sum_{i=0}^{0} i$$

$$= \{ \text{calcolo} \}$$

$$0$$

$$= \{ \text{calcolo} \}$$

$$\frac{0 \cdot (0+1)}{2}$$

# Caso induttivo

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2} \implies \sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

dimostrare la verità del conseguente supponendo vero l'antecedente (ipotesi induttiva)

$$\sum_{i=0}^{n+1} i$$

$= \{\text{calcolo}\}$

$$(n+1) + \sum_{i=0}^{n} i$$

$= \{\text{ip. induttiva}: \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}\}$

$$(n+1) + \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

$= \{\text{calcolo}\}$

$$2n+2 + n\cdot(n+1)$$

$$\frac{2n+2+n\cdot(n+1)}{2}$$

$$= \{\text{calcolo}\}$$

$$\frac{2n+2+n^2+n}{2}$$

$$= \{\text{calcolo}\}$$

$$\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$$

Supponiamo di aver dimostrato

- $P(\emptyset)$
- $\forall n \in \mathbb{N}.\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Supponiamo per assurdo che

$$\left(\exists n \in \mathbb{N}.\ \neg P(n)\right)$$

$n$ non può essere $\emptyset$, perché abbiamo dimostrato $P(\emptyset)$.

Prendiamo $k$ come minimo valore per cui non vale la proprietà, cioè $k$ minimo valore per cui $\neg P(k)$

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}.\ P(n) \Rightarrow P(n+1)\right)$$

$$\equiv$$

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}.\ \neg P(n+1) \Rightarrow \neg P(n)\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} A \Rightarrow B \\ \equiv \\ \neg B \Rightarrow \neg A \end{array}}$$

Ma allora:

$$\neg P(k) \Rightarrow \neg P(k-1)$$

contraddicendo il fatto che $k$ sia il minimo per cui non vale $P$

minimo per cui vale P

Lemma:

$T: \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ continua

allora

$\forall i \in \mathbb{N}.\ T^i(\{\}) \subseteq T^{i+1}(\{\})$

---

Dim. per induzione

- $T^{\emptyset}(\{\}) \subseteq T^1(\{\})$ caso base

- $T^i(\{\}) \subseteq T^{i+1}(\{\})$

$\Longrightarrow$

$T^{i+1}(\{\}) \subseteq T^{i+2}(\{\})$

caso induttivo

mercoledì 13 novembre 2019 11:53

# Caso base

$$\underline{T^{\emptyset}(\{\}) \subseteq T^{1}(\{\})}$$

$$T^{\emptyset}(\{\})$$

$$= \{\text{def. } T^{i}\}$$

$$\{\}$$

$$\subseteq \{\ \{\} \subseteq A\ \}$$

$$T^{1}(\{\})$$

Caso induttivo

$$\underbrace{T^i(\{\}) \subseteq T^{i+1}(\{\})}_{\text{ipotesi indutt.}} \Rightarrow \underline{T^{i+1}(\{\}) \subseteq T^{i+2}(\{\})}$$

$T^{i+1}(\{\})$

$= \{ \text{def } T^i \}$

$T(\underline{T^i(\{\})})$

$\subseteq$

$\subseteq \{ T \text{ continua} \Rightarrow T \text{ monotona},$ ip. ind. $T^i(\{\}) \subseteq T^{i+1}(\{\}) \}$

$T(T^{i+1}(\{\}))$

$= \{ \text{def. } T^i \}$

$T^{i+2}(\{\})$

Teo. di ricorsione

$T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ continua implica

a) $I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\})$ è un punto fisso di $T$

b) per ogni altro $J$, $T(J) = J$, implica

$I \subseteq J$.

---

a)

$T(I)$

$= \{ \text{def. } I \}$

$T\left(\bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\})\right)$

$= \{ T$ è continua $T\left(\bigcup_{i \geq 0} x_i\right) = \bigcup_{i \geq 0} T(x_i)$

e, per il lemma precedente,

$T^i(\{\})$ è una catena $\}$

$\bigcup_{i \geq 0} T(T^i(\{\}))$

$= \{ \text{def } T^i \}$

$$\bigcup_{i \geq 0} T^{i+1}(\{\})$$

$= \{$ calcolo $\}$

$$\bigcup_{i \geq 1} T^{i}(\{\})$$

$= \{$ proprietà di $\cup \}$

$$\left(\bigcup_{i \geq 1} T^{i}(\{\})\right) \cup \{\}$$

$= \{$ def $T^{i} \}$

$$\left(\bigcup_{i \geq 1} T^{i}(\{\})\right) \cup T^{\emptyset}(\{\})$$

$= \{$ calcolo $\}$

$$\bigcup_{i \geq 0} T^{i}(\{\})$$

$= \{$ def $I \}$

$I$

CVD

$T(I)$

$=$

$\vdots$

$=$

$I$

FLOREA

RAGONESE

CVD

RAGONESE
SALVATORE

b) per ogni altro p.f. $J$ di $T$, $J = T(J)$, abbiamo
$$I \subseteq J.$$

---

Dimostriamo che

$$\forall i \in \mathbb{N}.\ T^i(\{\}) \subseteq J$$

dimostriamo per induzione

e quindi
$$\bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\}) = I \subseteq J$$

$$\forall i \in \mathbb{N}.\ T^i(\{\}) \subseteq J$$

Caso base

$$T^\emptyset(\{\}) \subseteq J$$

$T^\emptyset(\{\})$

$= \{ \text{def } T^i \}$

$\{\}$

$\subseteq \{ \{\} \subseteq A \}$

$J$

Caso induttivo

$$\underbrace{T^i(\{\}) \subseteq J}_{\text{ipotesi induttiva}} \implies T^{i+1}(\{\}) \subseteq J$$

$T^{i+1}(\{\})$

$= \{ \text{def } T^i \}$

$$T\left(T^i(\{\})\right)$$

$$\subseteq \{ \text{ T è continua e quindi monotono, ip. ind. } T^i(\{\}) \subseteq J \}$$

$$T(J)$$

$$= \{ \text{ J è punto fisso, } T(J) = J \}$$

$$J$$

$$I \subseteq J$$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(n) = 2 \cdot n$$

Il GRAFICO di una funzione è l'insieme delle coppie $\langle$argomento, risultato$\rangle$

Nel caso

$$f(n) = 2 \cdot n$$

il grafico è l'insieme $F$

$$F = \{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, (3, 6), \ldots \}$$

---

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ f(n-1) + 2 & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

definizione ricorsiva di funzione

Il grafico di una funzione è un insieme.

Se riesco a definire il grafico di

se riesco a definire il grafico di
una funzione (che è un insieme)
ricorsivamente posso applicare il teo.
di ricorsione.

$$f(n) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } n = 0 \\ f(n-1)+2 & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

$$F = \{\langle\emptyset,\emptyset\rangle\} \cup \{\langle n, n+2\rangle \mid \langle n-1, n\rangle \in F\}$$

$$F = T(F)$$

dove $T(X) = \{\langle\emptyset,\emptyset\rangle\} \cup \{\langle n, n+2\rangle \mid \langle n-1, n\rangle \in X\}$

def. ricorsiva di un insieme del tipo $F = T(F)$

$$T^{\emptyset}(\{\}) = \{\}$$

$$T^{1}(\{\}) = T(\{\}) = \{\langle\emptyset,\emptyset\rangle\} \cup \{\langle n, n+2\rangle \mid \langle n-1, n\rangle \in \{\}\}$$

$$= \{\langle\emptyset,\emptyset\rangle\}$$

$$T^{2}(\{\}) = T(\{\langle\emptyset,\emptyset\rangle\}) =$$

$$\{\underline{\langle\emptyset,\emptyset\rangle}\} \cup \{\langle n, n+2\rangle \mid \langle n-1, n\rangle \in \{\langle\emptyset,\emptyset\rangle\}\}$$

$$=$$

$$\langle n-1, n\rangle \in \{\langle\emptyset,\emptyset\rangle\}$$

$$\{\langle\emptyset,\emptyset\rangle, \langle 1,2\rangle\}$$

$$\langle n-1, n\rangle = \langle\emptyset,\emptyset\rangle$$

$n = 1$

$n+2 = 2$

$$T^3(\{\}) = T(\{\langle\emptyset,\emptyset\rangle, \langle 1,2\rangle\}) =$$

$$\{\emptyset,\emptyset\} \cup \{\langle n, n+2\rangle \mid \langle n-1, n\rangle \in \{\langle\emptyset,\emptyset\rangle, \langle 1,2\rangle\}\}$$

$=$

$\langle n-1, n\rangle = \langle\emptyset,\emptyset\rangle$ $\quad n = 1 \quad n+2 = 2$

$\langle n-1, n\rangle = \langle 1,2\rangle$ $\quad n = 2 \quad n+2 = 4$

$$\{\langle\emptyset,\emptyset\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,4\rangle\}$$

$\vdots$

$$f(n) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } n = \emptyset \\ f(n-1)+2 & \text{se } n > \emptyset \end{cases}$$

Dimostrare per induzione

$$(\forall n \in \mathbb{N} .\ f(n) = 2 \cdot n)$$

<u>Caso base</u>

$$f(\emptyset) = 2 \cdot \emptyset$$

$f(\emptyset)$

$= \{ \text{def. ric. di } f \}$

$\emptyset$

$= \{ \text{calcolo} \}$

$2 \cdot \emptyset$

<u>Caso induttivo</u>

$$\underbrace{f(n) = 2 \cdot n}_{\text{ip. indutt.}} \implies \underline{f(n+1) = 2 \cdot (n+1)}$$

$f(n+1)$

$= \{\text{def } f,\ n+1 > 0\}$

$f(n)+2$

$= \{\text{ip. ind: } f(n) = 2 \cdot n\}$

$2 \cdot n + 2$

$= \{\text{calcolo}\}$

$2 \cdot (n+1)$

$$f(n) = \underline{3 \cdot n + 3}$$

$$f(n) = \begin{cases} 3 & n = \emptyset \\ f(n-1) + 3 & n > \emptyset \end{cases}$$

Caso base $f(\emptyset) = 3 \cdot \emptyset + 3$

Caso induttivo

$$\underbrace{f(n) = 3 \cdot n + 3}_{\text{ip. ind.}} \Longrightarrow f(n+1) = 3 \cdot (n+1) + 3$$

$f(n+1)$

$= \{ \text{def } f,\ n+1 > 0 \}$

$f(n)\ \ldots \to + 3$

$= \{ \text{ip. ind. } f(n) = 3 \cdot n + 3$

$3 \cdot n + 3 \ \ldots + 3$

$3 \cdot n + 3 \ldots$ $+3$

$= \{ \text{calcolo} \}$

$3 \cdot (n+1) + 3$

$$f(n,m) = 3 \cdot n + 2 \cdot m + 2$$

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

il dominio è $\neq \mathbb{N}$

se devo fare induzione sul dominio l'induzione naturale non è sufficiente.

PRINCIPIO DI INDUZIONE "BEN FONDATA"