Programmazione funzionale

Definizioni di funzioni
Uso delle funzioni (applicazione di funzioni)

→ **Definizioni RICORSIVE**

TEORIA DELLA RICORSIONE

- teoria dell'informatica
- quali sono le soluzioni delle "equazioni ricorsive"

EQUAZIONE RICORSIVA

$$f : A \to A$$

$$x = f(x) \qquad x \in A$$

è una equazione ricorsiva

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(x) = x + 1$

$x = f(x)$ quali sono le soluzioni?

$x = x + 1$ non ha soluzioni

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(x) = 2 \cdot x$

$x = f(x)$ quali soluzioni ha?

$x = 2 \cdot x$ $x = \emptyset$ è la soluzione

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(x) = x$

$x = f(x)$

$x = x$ infinite soluzioni

A insieme (finito o infinito

$\mathbb{P}_A$ ($\mathcal{P}_A$) parti di A è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A.

$A = \{\emptyset, 1, 2\}$

$\mathcal{P}_A$ $\mathbb{P}_A = \{\{\}, \{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{\emptyset, 1\}, \{\emptyset, 2\},$
$\{1, 2\}, \{\emptyset, 1, 2\}\}$

$= \{1, \emptyset\}$

$\mathbb{P}_{\mathbb{N}} = \{\{\}, \{\emptyset\}, \{1\}, \ldots\ldots$
$\{\emptyset, 1\}, \{\emptyset, 2\}, \ldots \}$

$\mathbb{P}_{\mathbb{N}}$ è infinito

A insieme

$$T: \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$$

T (funzione da insiemi a insiemi)

trasformazione di insiemi in insiemi

$$T: \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$$

$$T(X) = X \cup \{1\}$$

$$T(\{\emptyset, 2\}) = \{\emptyset, 1, 2\}$$

$$T(\{\emptyset, 1\}) = \{\emptyset, 1\}$$

$$X = T(X)$$

equazione ricorsiva su insiemi

$\{\emptyset, 2\}$ è una soluzione? No!

$$T(\{\emptyset, 2\}) = \{\emptyset, 1, 2\}$$

$\{\emptyset, 1\}$ è una soluzione?

$X = T(X)$ 				sì

$T(\{\emptyset, 1\}) = \{\emptyset, 1\}$

$T(X) = X \cup \{1\}$ 		$T : \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$

quante sono le soluzioni di

$$X = T(X) \ ?$$

infinite! le soluzioni sono tutti gli insiemi $\in \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$ che contengono il valore 1

$$T : \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$$

$$T(X) = \mathbb{N} \setminus X$$

$$T(\{0,1\}) = \{2,3,4,5,\ldots\}$$

$X = T(X)$ ha soluzioni? no!

$$X = \mathbb{N} \setminus X$$

$$T : \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$$

$$T(X) = \{0\} \cup \{n \mid n-2 \in X\}$$

$$X = T(X) \equiv X = \{0\} \cup \{n \mid n-2 \in X\}$$

$\{0,1\}$ $\qquad$ $\{0,1\} = T(\{0,1\})$?

$$T(\{0,1\})$$
$$= \{\text{def. di } T\}$$

$T(\{0,1\}) = \{0,2,3\}$

$\{0,1\}$ non è una sol di

$= \{ \text{def. di } T \}$

$\{\emptyset\} \cup \{ n \mid n-2 \in \{\emptyset, 1\} \}$

$= \{ \text{calcolo} \}$

$\{\emptyset, 2, 3\}$

$\{\emptyset, 1\}$ non è una sol di

$X = T(X)$

$n-2 \in \{\emptyset, 1\}$

$n-2 = 0 \iff n = 2$

$n-2 = 1 \iff n = 3$

$T(X) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in X\}$

$\mathbb{N}$ è una soluzione di $X = T(X)$?

notazione: una soluzione di $X = T(X)$ si dice anche PUNTO FISSO di T

$T(\mathbb{N})$

$= \{$ def. $T \}$

$\{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in \mathbb{N}\}$

$= \{$ calcolo $\}$

$\{\emptyset, 2, 3, 4, \ldots\}$

$\mathbb{N} \neq T(\mathbb{N})$

$n-2 \in \mathbb{N}$

$n-2 = \emptyset \iff n = 2$

$n-2 = 1 \iff n = 3$

$n-2 = 2 \iff n = 4$

$\vdots \qquad \vdots$

$$T(\{0, 2, 3, 4, \dots\})$$
$$= \{\text{def } T\}$$
$$\{0, 2, 4, 5, \dots\}$$

$\neq$

$n-2 \in \{0, 2, 3, 4, \dots\}$

$n-2 = 0 \iff n = 2$
$n-2 = 2 \iff n = 4$
$n-2 = 3 \iff n = 5$
$\vdots \qquad \vdots$

$$T(X) = \{0\} \cup \{n \mid n-2 \in X\}$$

ha un unico punto fisso, che è l'insieme dei naturali pari.

$$T(\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\})$$
$$= \{\text{def } T\}$$
$$\{0\} \cup \{n \mid n-2 \in \{0, 2, 4, 6, \dots\}\}$$
$$= \{\text{calcolo}\}$$
$$\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$n-2 = 0 \iff n = 2$
$n-2 = 2 \iff n = 4$
$n-2 = 4 \iff n = 6$
$n-2 = 6 \iff n = 8$
$\vdots$

Una trasformazione T

$T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ A è un insieme

si dice MONOTONA sse

dati $X_1, X_2 \in \mathbb{P}_A$

abbiamo

$$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow T(X_1) \subseteq T(X_2)$$

inclusione tra insiemi

$T(X) = X \cup \{1\}$ è monotona ?

$T : \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$

$X_1, X_2 \in \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$

$X_1 \subseteq X_2$

1) $1 \notin X_1, \quad 1 \notin X_2$

$T(X_1) = X_1 \cup \{1\}$

$T(X_2) = X_2 \cup \{1\}$

$X_1 \cup \{1\} \subseteq X_2 \cup \{1\}$

$$X_1 \cup \{1\} \subseteq X_2 \cup \{1\}$$

$$T(X_1) \subseteq T(X_2)$$

2) $1 \in X_1$, $1 \in X_2$ $\qquad X_1 \subseteq X_2$

$$T(X_1) = X_1$$

$$T(X_2) = X_2$$

$$X_1 \subseteq X_2$$

$$T(X_1) \subseteq T(X_2)$$

3) $X_1 \subseteq X_2$ $\qquad 1 \notin X_1$, $1 \in X_2$

$$T(X_1) = X_1 \cup \{1\}$$

$$T(X_2) = X_2$$

$$1 \in X_2 \wedge X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow$$

$$X_1 \cup \{1\} \subseteq X_2$$

$$T(X_1) \subseteq T(X_2)$$

$T(X) = X \cup \{1\}$ è monotona

CONTINUITÀ DELLE TRASFORMAZIONI

$T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ si dice CONTINUA

se presa una catena di insiemi in $\mathbb{P}_A$

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq X_4 \;\ldots\ldots$$

finita o infinita

abbiamo

$$\bigcup_{i \geq 0} T(X_i) = T\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right)$$

$T(X) = X \cup \{1\}$ $\qquad\qquad T: \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$

è continua?

$X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \dots\dots$

$$\boxed{\bigcup_{i\geq 0} T(X_i) = T\left(\bigcup_{i\geq 0} X_i\right)}$$ da dimostrare

$$\bigcup_{i\geq 0} T(X_i)$$

$= \{$def. di $T\}$

$$\bigcup_{i\geq 0} \left(X_i \cup \{1\}\right)$$

$= \{$proprietà dell'unione$\}$

$$\left(\bigcup_{i\geq 0} X_i\right) \cup \{1\}$$

$= \{$def. $T\}$

$$T\left(\bigcup_{i\geq 0} X_i\right) \qquad = \qquad \left(\bigcup_{i\geq 0} X_i\right) \cup \{1\}$$

quindi T è continua?

$$T : \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$$

$$T(X) = \begin{cases} \{1\} & \text{se } X \text{ è infinito} \\ \{\} & \text{se } X \text{ è finito} \end{cases}$$

T è monotone?

T è continue?

$X_1, X_2 \in \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$

$$X_1 \subseteq X_2 \implies T(X_1) \subseteq T(X_2)$$

1) X_1, X_2 entrambi finiti

$T(X_1) = \{\}$

$T(X_2) = \{\}$

$\{\} \subseteq \{\}$

$T(X_1) \subseteq T(X_2)$

2) X_1, X_2 entrambi infiniti

$T(X_1) = \{1\}$

$\{1\} \subseteq \{1\}$

$T(X_2) = \{1\}$ $\qquad$ $T(X_1) \subseteq T(X_2)$

3) X_1 è finito e X_2 è infinito

$T(X_1) = \{\}$ $\qquad$ $\{\} \subseteq \{1\}$

$T(X_2) = \{1\}$ $\qquad$ $T(X_1) \subseteq T(X_2)$

T è monotone !!

T è continua, $T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$

se presa una qualsiasi catena

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$$

$$\Longrightarrow$$

$$\bigcup_{i \geq 0} T(X_i) = T\left(\bigcup_{i \geq \emptyset} X_i\right)$$

$$T(X) = \begin{cases} \{\} & \text{se } X \text{ è finito} \\ \{1\} & \text{se } X \text{ è infinito} \end{cases}$$

<u>NON E' CONTINUA</u>

prendiamo la catena di insiemi $\in \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$

$$\underset{X_1}{\{\emptyset\}} \subseteq \underset{X_2}{\{\emptyset,1\}} \subseteq \underset{X_3}{\{\emptyset,1,2\}} \subseteq \underset{X_4}{\{0,1,2,3\}} \dots \text{ infinita}$$

$$\bigcup_{i \geq 0} X_i = \mathbb{N}$$

$$\bigcup_{i \geq 0} T(X_i) \neq T\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right)$$

$= \{$ ogni elemento X_i è finito, perché contiene i elementi $\}$ | $= \{ \bigcup_{i \geq 0} X_i = \mathbb{N} \}$

$\mathbb{N}$ è infinito

$\{\}$ | $\{1\}$

Se $T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ è continua, allora T è monotona.

Dimostrazione

$X_1, X_2 \in \mathbb{P}_A$ $\qquad X_1 \subseteq X_2$

$T(X_2)$

$= \{ X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow X_1 \cup X_2 = X_2 \}$

$T(X_1 \cup X_2)$

$= \{ T$ è continua, quindi presa la catena $X_1 \subseteq X_2$, $\bigcup_{i=1,2} T(X_i) = \underline{\underline{T(\bigcup_{i=1,2} X_i)}} \}$

$T(X_1) \cup T(X_2)$

$T(X_2) = T(X_1) \cup T(X_2)$

$\Rightarrow$

$T(X_1) \subseteq T(X_2)$ $\quad \|$ ho dimostrato che T è monotona.

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow T(x_1) \leq T(x_2)$$

TEOREMA DI RICORSIONE

Presa una $T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$.

Se T è continua allora

a) $I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\})$ è un punto fisso di T. Cioè è una soluzione dell'eq.

$$x = T(x)$$

b) per qualsiasi altro punto fisso di T, J, $J = T(J)$, abbiamo

$$I \subseteq J$$

I è il minimo punto fisso di T

Il teo di ricorsione dice che se una trasformazione T è continua esiste un minimo punto fisso e ci dice come calcolarlo $\left(I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\})\right)$.

lunedì 11 novembre 2019 10:38

$T^i(\{\})$ – definizione

$T^{\emptyset}(\{\}) = \{\}$

$T^1(\{\}) = T(\{\})$

$T^2(\{\}) = T(T(\{\}))$

$T^3(\{\}) = T(T(T(\{\})))$,

$\vdots$

$T^{\emptyset}(\{\}) = \{\}$

$T^i(\{\}) = T(T^{i-1}(\{\}))$ $\qquad i > \emptyset$

definizione ricorsiva

$T: \mathcal{P}_{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$

$T(X) = X \cup \{1\}$ $\qquad$ $X = T(X)$

Calcoliamo $\qquad I = \bigcup_{i \geq 0} T^{i}(\{\})$

$$T^{0}(\{\}) = \{\}$$

$$T^{1}(\{\}) = T(\{\}) = \{1\}$$

$$T^{2}(\{\}) = T(T^{1}(\{\})) = T(\{1\}) = \{1\}$$

$I = \{1\}$ minimo punto fisso di T

$X = T(X) \qquad X = X \cup \{1\}$

$$T : \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$$

$$T(X) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in X\}$$

$$T^{0}(\{\}) = \{\}$$

$$T^{1}(\{\}) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in \{\}\} = \{\emptyset\}$$

$$T^{2}(\{\}) = T(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\} \cup \{\underline{n \mid n-2 \in \{\emptyset\}}\}$$

$$= \{\emptyset, 2\}$$

$n-2 = \emptyset$

$$T^{3}(\{\}) = T(\{\emptyset, 2\}) =$$

$$\{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in \{\emptyset, 2\}\} =$$

$$\{\emptyset, 2, 4\}$$

$n-2 \in \{\emptyset, 2\}$

$n-2 = 0 \iff n=2$

$n-2 = 2 \iff n=4$

$\vdots$

$\bigcup_{i \geq 0} T^{i}(\{\})$ è l'insieme infinito dei numeri naturali pari

Lemma:

$T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ continua $\Rightarrow$

$$T^i(\{\}) \subseteq T^{i+1}(\{\})$$

Si dimostra per <u>induzione</u>.

lunedì 11 novembre 2019 10:50

Principio di induzione sui numeri naturali (principio di induzione naturale)

Se ho una proprietà P su $\mathbb{N}$

Se dimostro

$P(\emptyset)$ (caso base)

$\forall n \in \mathbb{N}. P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (caso induttivo)

posso concludere che P vale su tutti i naturali.

- $P(\emptyset)$
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

intuizione

$$P(\emptyset) \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

$$\Rightarrow P(1) \wedge \quad \text{"}$$

$$\Rightarrow P(2) \wedge \quad \text{"}$$

$$\Rightarrow P(3)$$

T continua $\Rightarrow$ $T^i(\{\}) \subseteq T^{i+1}(\{\})$

Caso base $i = \emptyset$

$$T^{\emptyset}(\{\}) \subseteq T^{1}(\{\})$$

$P(\emptyset)$

Caso induttivo

$$T^{n}(\{\}) \subseteq T^{n+1}(\{\}) \Rightarrow$$

$$T^{n+1}(\{\}) \subseteq T^{n+2}(\{\})$$

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

lunedì 11 novembre 2019 10:58

Caso base

$$T^{\emptyset}(\{\}) \subseteq T^{1}(\{\})$$

$T^{\emptyset}(\{\})$

$= \{\text{def. } T^{i}\}$

$\{\}$

$\subseteq \{\ \{\} \subseteq A, \text{ qualsiasi sia } A\}$

$T^{1}(\{\})$

lunedì 11 novembre 2019 11:00

caso induttivo

$$\underbrace{T^n(\{\}) \subseteq T^{n+1}(\{\})}_{} \Rightarrow \underbrace{T^{n+1}(\{\}) \subseteq T^{n+2}(\{\})}_{}$$

Si cerca di dimostrare il conseguente supponendo vero l'antecedente

$A \Rightarrow B$