PUMPING LEMMA (per linguaggi regolari)

L è regolare $\Longrightarrow$

$$\Big(\exists n \in \mathbb{N}.\ \big(\forall w \in L.\ |w| \geq n \Longrightarrow \big(\exists x,y,z.\ w = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge y \neq \varepsilon \wedge (\forall i \in \mathbb{N}.\ xy^i z \in L)\big)\big)\Big)$$

$A \Rightarrow B$

$\equiv$

$\neg B \Rightarrow \neg A$

$$\Big(\forall n \in \mathbb{N}.\ \big(\exists w \in L.\ |w| \geq n \wedge \big(\forall xyz.\ (w = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge y \neq \varepsilon) \Longrightarrow (\exists i \in \mathbb{N}.\ xy^i z \notin L)\big)\big)\Big)$$

$\Longrightarrow$ L non è regolare

$\Sigma = \{a, b\}$ $\qquad$ $L = \{a, ab\} \subseteq \Sigma^*$

$L = \{ a^k b^k \mid k > \emptyset \}$ non è regolare

utilizzo il pumping lemma.

Qualunque sia $n \in \mathbb{N}$
prendo la stringa $w = a^n b^n$
$|a^n b^n| = 2n \geq n$

devo far vedere che per tutte le suddivisioni di w in xyz tali che $\underline{|xy| \leq n}$ e $\underline{y \neq \varepsilon}$ allora esiste un $i \in \mathbb{N}$ tale che xy^iz non appartiene a L

$w = a^n b^n$

$$\left\{ \begin{array}{lll} x = a^s & \text{con} & \emptyset \leq s < n \\ y = a^t & \text{con} & \emptyset < t \leq n - s \\ z = a^{n-t-s} b^n & & \end{array} \right\}$$ rappresenta tutte le possibili suddivisioni

di $a^n b^n$ che rispettano $|xy| \leq n$ e $y \neq \varepsilon$

prendiamo $i = \emptyset$
$$x y^{\emptyset} z = a^s a^{n-t-s} b^n = a^{n-t} b^n$$

poiché $t > 0$ quindi $n - t \neq n$
abbiamo che $a^{n-t} b^n \notin L$

poiché $t>0$ quindi $n-t \neq n$

abbiamo che $a^{n-t} b^{n} \notin L$

Concludiamo che $L = \{a^k b^k \mid k>0\}$ non è regolare

$i=2$

$$xy^2z = a^s a^t a^t a^{n-s-t} b^n = a^{n+t} b^n$$

poiché $t>0$ allora $n+t \neq n$

$$a^{n+t} b^n \notin L$$

giovedì 17 ottobre 2019 16:42

Errori più frequenti

- prendere una stringa con la quale non si riesce a dimostrare (sol: prendere la stringa più semplice possibile
- Non considerare tutte le possibili divisioni di w in xyz
- Spesso con l'applicazione (sbagliata) del PL si dimostrano non regolari dei linguaggi che sono regolari

$$L = \{ b a^k b^k \mid k > 0 \}$$

Quali sono tutte le possibili divisioni della stringa $w = b a^n b^n$?

NON SONO TUTTE le possibili suddivisioni

$$\begin{cases} x = \varepsilon \\ y = b a^t \qquad 0 \leq t \leq n-1 \\ z = a^{n-t} b^n \\ \text{per } i = 0 \quad x y^0 z = a^{n-t} b^n \notin L \\ \text{perché manca la prima } b \text{ e } n-t \neq n \end{cases}$$

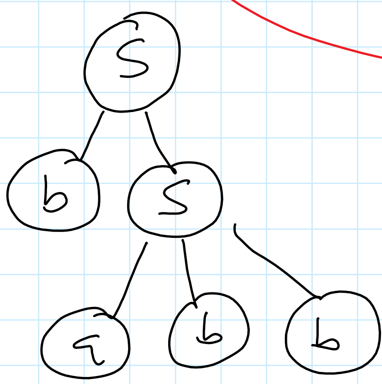
$$\begin{cases} x = b a^s \qquad 0 \leq s < n-1 \\ y = a^t \qquad 0 < t \leq n-1-s \\ z = a^{n-s-t} b^n \\ i = 0 \quad x y^0 z = b a^{n-t} b^n \\ t > 0 \Rightarrow n-t \neq n \\ \text{e quindi} \quad b a^{n-t} b^n \notin L \end{cases}$$

$$L = \{ a^k b^m \mid k, m > 0 \wedge k < m \}$$

$$\neq$$

$$L = \{ a^k b^{k+1} \mid k > 0 \}$$

$$S \rightarrow abb \mid aSb \mid \cancel{bS}$$



$$babb \notin L$$

$$S \rightarrow abb \mid aSb \mid Sb$$

$$L = \{ a^k b^m \mid m, k > 0 \wedge k < m \}$$

Qualunque sia $n \in \mathbb{N}$

$$w = a^n b^{n+1} \in L$$

$$|w| = 2n+1 \geq n$$

$$x = a^s \qquad \emptyset \leq s < n$$

$$y = a^t \qquad \emptyset < t \leq n - s$$

$$z = a^{n-t-s} b^{n+1}$$

prendo $i = \emptyset$ $\quad x y^0 z = a^{n-t} b^{n+1}$

dato che $t > \emptyset$ ho $n - t \neq n$

quindi $a^{n-t} b^{n+1} \notin L$

prendiamo $i = 2$

$$x y^2 z = a^s a^t a^t a^{n-s-t} b^{n+1} =$$

$$= a^{n+t} b^{n+1}$$

dato che $t > 0$ ho $n + t \not< n+1$

quindi $a^{n+t} b^{n+1} \notin L$

quindi $a^{n+t} b^{n+1} \notin L$

giovedì 17 ottobre 2019 17:12

$$L = \{ a^k b^m \mid m, k > 0 \wedge k > m \}$$

$$w = a^{m+1} b^m$$

$$|w| = 2m+1 \geq m$$

$x = a^s \qquad \varnothing \leq s < m$

$y = a^t \qquad \varnothing < t \leq m$

$z = a^{m+1-t-s} b^m$

prendo $i = \varnothing$

$$xy^{\varnothing}z = a^{m+1-t} b^m$$

$$t > 0 \Rightarrow m+1-t \not> m$$

quindi $a^{m+1-t} b^m \notin L$

$$L = \{ a^n b^m c^k \mid n, m, k > 0 \wedge m = n + k \}$$

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$abbbcc \in L$

$aaabbbbc \in L$

$abc \notin L$

$$L = \{ \underline{a^k b^k}\ \underline{b^m c^m} \mid k, m > 0 \}$$

$$L = \{ \alpha\beta \mid \alpha \in \{ a^n b^n \mid n > 0 \} \wedge \beta \in \{ b^m c^m \mid m > 0 \} \}$$

$n \neq m$

$S \to AB$

$A \to ab \mid aAb$

$B \to bc \mid bBc$

$\Sigma = \{a, b\}$

$$L = \{a^n b^m \mid n, m > 0 \wedge n \neq m\}$$

$$L = \{a^n b^m \mid n, m > 0 \wedge n < m\} \cup$$
$$\{a^n b^m \mid n, m > 0 \wedge n > m\}$$

$S \rightarrow A \mid B$

$A \rightarrow aab \mid aAb \mid aA$

$B \rightarrow abb \mid aBb \mid Bb$

giovedì 17 ottobre 2019 17:34

$L = \{a^k b^m \mid k, m > 0\}$ non è regolare

Qualunque sia n

$w = a^n b^n$

$x = a^s \quad 0 \leq s < n$

$y = a^t \quad 0 < t \leq n - s$

$z = a^{n-s-t} b^n$

NO!!!

prendo $i = 0$

$x y^0 z = a^s a^{n-s-t} b^n = a^{n-t} b^n$

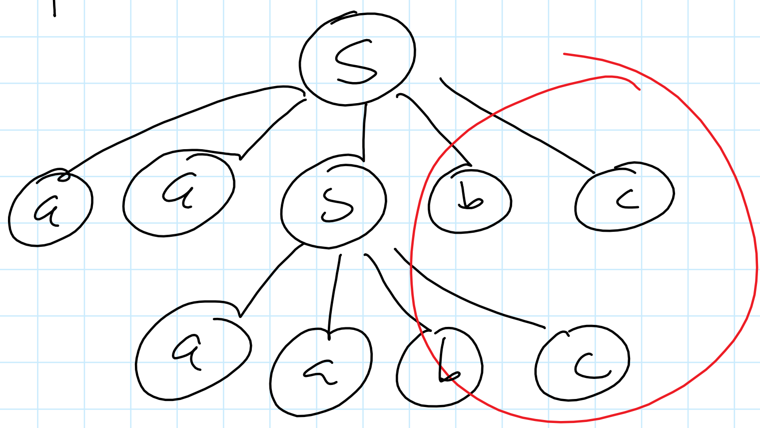
$t > 0 \Rightarrow n - t \neq n$

quindi $a^{n-t} b^n \notin L$

$\Sigma = \{a, b, c\}$

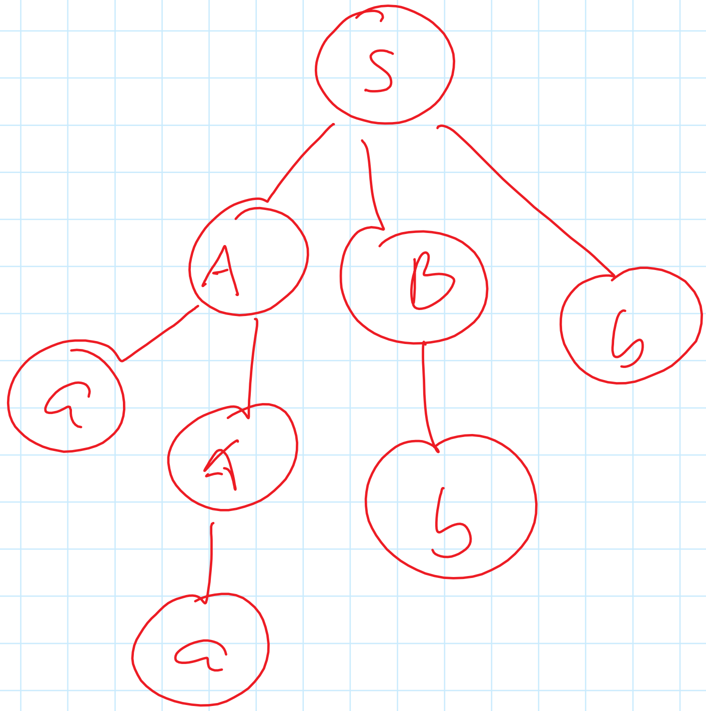
$L = \{ a^{2n} b^n c \mid n > 0 \}$

$S \to aaSbc \mid aabc$ NO!



$S \to Ac$

$A \to aab \mid aaAb$ Ok!



aabb