Teoria della ricorsione

lunedì 19 novembre 2018 09:12

Teorema di ricorsione:

$T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ continua

- esiste un punto fisso $I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\})$

soluzione della eq. ricorsiva $X = T(X)$

- per ogni altro punto fisso di T, $J = T(J)$, $I \subseteq J$

$T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$

T continua $\Rightarrow$ T monotone

Dim

$X_1 \subseteq X_2 \qquad X_1, X_2 \in \mathbb{P}_A$

dobbiamo far vedere che $T(X_1) \subseteq T(X_2)$

monotone

$T(X_2)$

$= \{ X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow X_2 = X_1 \cup X_2 \}$

giustificazione

$T(X_1 \cup X_2)$

$$T(X_1 \cup X_2)$$

$$= \left\{ T \text{ continua},\ X_1 \subseteq X_2,\ T\Big(\bigcup_{i=1,2} X_i\Big) = \bigcup_{i=1,2} T(X_i) \right.$$

$$T(X_1) \cup T(X_2)$$

$$T(X_2) = T(X_1) \cup T(X_2) \Longrightarrow$$

$$\boxed{T(X_1) \subseteq T(X_2)}$$

monotone

Principio di induzione sui numeri naturali (naturale)

P proprietà

le proprietà P è vera nel valore $\emptyset$

$$\left(\underline{P(\emptyset)} \wedge \left(\forall n \in \mathbb{N}.\ \underline{P(n) \Rightarrow P(n+1)}\right)\right)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}.\ P(n)\right)$$

Quindi:

- Se si dimostra la proprietà in $\emptyset$, $P(\emptyset)$ (caso base)
- Se si dimostra l'implicazione $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ senza fare assunzioni su n $(\forall n \in \mathbb{N})$ (caso induttivo)

Allora la proprietà vale su tutti i naturali!

Dim: supponiamo di aver dimostrato .

sia il caso base che il caso induttivo

- $P(\emptyset)$
- $\forall n \in \mathbb{N}.\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Assumiamo, per assurdo, $\exists n \in \mathbb{N}.\ \neg P(n)$

Prendiamo il minimo $m \in \mathbb{N}$ tale che $\neg P(m)$

- m non può essere $\emptyset$, perché abbiamo dimostrato $P(\emptyset)$.
- $m > 0$, abbiamo dimostrato (caso induttivo)

$$\boxed{\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}.\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \\ &\equiv \\ &\forall n \in \mathbb{N}.\ \neg P(n+1) \Rightarrow \neg P(n) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &A \Rightarrow B \\ &\equiv \\ &\neg B \Rightarrow \neg A \end{aligned}}$$

$$\underline{\neg P(m) \Rightarrow \neg P(m-1)}$$

Contraddizione perché m è il minimo valore per cui $\neg P(m)$

lemma:

$T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ continua

$$\forall i \in \mathbb{N}.\ T^i(\{\}) \subseteq T^{i+1}(\{\}) \qquad P$$

$$T^0(\{\}) \subseteq T^1(\{\}) \subseteq T^2(\{\}) \subseteq \dots$$

Dimostrazione per induzione

- caso base $(i=\emptyset)$ $\quad T^{\emptyset}(\{\}) \subseteq T^1(\{\})$

- caso induttivo:

$$T^n(\{\}) \subseteq T^{n+1}(\{\})$$
$$\Longrightarrow$$
$$T^{n+1}(\{\}) \subseteq T^{n+2}(\{\})$$

Caso base $\quad T^0(\{\}) \subseteq T^1(\{\})$

$$T^{\emptyset}(\{\})$$
$$= \{def\}$$

$= \{ \text{def} \}$

$\{\}$

$\subseteq \{ \{\} \subseteq A \text{ per ogni } A \}$

$T^1(\{\})$

caso induttivo: $T^n(\{\}) \subseteq T^{n+1}(\{\}) \Rightarrow T^{n+1}(\{\}) \subseteq T^{n+2}(\{\})$

ipotesi induttiva

$A \Rightarrow B$

dimostriamo B supponendo vero A

$T^{n+1}(\{\})$

$= \{ \text{def } T^i \}$

$T(T^n(\{\}))$

$\subseteq \{ \text{ip. induttiva: } T^n(\{\}) \subseteq T^{n+1}(\{\}),$
T continua e quindi monotona $\}$

$T(T^{n+1}(\{\}))$

$= \{ \text{def } T^i \}$

$T^{n+2}(\{\})$

Teo Ricorsione $T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ continua

- $I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\})$ è un punto fisso

$T(I)$

$= \{ \text{def } I \}$

$T\left(\bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\})\right)$

$= \{ T^i(\{\})$ formano una catena (lemma precedente), T continua $\}$

$\bigcup_{i \geq 0} T(T^i(\{\}))$

$= \{ \text{def } T^i \}$

$\bigcup_{i \geq 0} T^{i+1}(\{\})$

$= \{ \text{calcolo} \}$

$\bigcup_{i \geq 1} T^i(\{\})$

$= \{ \{\} \cup A = A \}$

$$\{\} \cup \bigcup_{i \geq 1} T^i(\{\})$$

$$= \{ T^0(\{\}) = \{\} \}$$

$$T^0(\{\}) \cup \bigcup_{i \geq 1} T^i(\{\})$$

$$= \{\text{calcolo}\}$$

$$\bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\})$$

$$= \{\text{def}\}$$

$$I$$

$T(I) = I$ quindi I è punto fisso di T

Teo Ricorsione

lunedì 19 novembre 2018 09:50

- per qualsiasi punto fisso di T, $J = T(J)$, abbiamo che $I \subseteq J$

$\bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\}) \subseteq J$	J punto fisso di T

$\forall i \in \mathbb{N},\ T^i(\{\}) \subseteq J$

Dim. per induzione

Caso base. $T^0(\{\}) \subseteq J$

Caso induttivo $T^n(\{\}) \subseteq J \implies T^{n+1}(\{\}) \subseteq J$

Caso base

$T^0(\{\})$

$= \{def\}$

$\{\}$

$\subseteq \{ \{\} \subseteq A$ per ogni $A \}$

$\mathcal{J}$

Caso induttivo $\quad T^n(\{\}) \subseteq \mathcal{J} \Rightarrow \underline{\underline{T^{n+1}(\{\}) \subseteq \mathcal{J}}}$

ip. induttiva

$$T^{n+1}(\{\})$$
$$= \{\text{def } T^i\}$$
$$T(T^n(\{\}))$$
$$\subseteq \{\text{ip. induttiva } T^n(\{\}) \subseteq \mathcal{J}, T \text{ continua e quindi monotona}\}$$
$$T(\mathcal{J})$$
$$= \{\mathcal{J} \text{ è punto fisso di } T\}$$
$$\mathcal{J}$$

$$T^{n+1}(\{\}) \subseteq \mathcal{J}$$

$$T : \mathcal{P}_{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$$

$$T(X) = \{2\} \cup \{n \mid n+1 \in X\}$$

$$X = T(X)$$

$$T^0(\{\}) = \{\}$$

$$T^1(\{\}) = T(\{\}) = \{2\} \cup \{n \mid n+1 \in \{\}\} = \{2\}$$

$$T^2(\{\}) = T(\{2\}) = \{2\} \cup \{n \mid n+1 \in \{2\}\} = \{1,2\}$$

$$n+1 \in \{2\}$$

$$n+1 = 2 \Rightarrow n = 1$$

$$T^3(\{\}) = T(\{1,2\}) = \{\underline{\underline{2}}\} \cup \{n \mid n+1 \in \{1,2\}\} = \{0,1,2\}$$

$$n+1 \in \{1,2\}$$

$$n+1 = 1 \Rightarrow n = 0$$

$$n+1 = 2 \Rightarrow n = 1$$

$$T^4(\{\}) = T(\{0,1,2\}) =$$

$$\{2\} \cup \{n \mid n+1 \in \{0,1,2\}\} = \{0,1,2\}$$

$\{2\} \cup \{n \mid n+1 \in \{\emptyset, 1, 2\}\} = \{\emptyset, 1, 2\}$

minimo punto fisso

$n+1 \in \{\emptyset, 1, 2\}$

$n+1 = 0 \Rightarrow \cancel{n = -1}$

$n+1 = 1 \Rightarrow n = \emptyset$

$n+1 = 2 \Rightarrow n = 1$

Teorema di ricorsione

$x = T(X)$ $\qquad$ $T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(n) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } n = \emptyset \\ 2 + f(n-1) & \text{se } n > \emptyset \end{cases}$$

definizione ricorsiva di funzione

$f(3)$

$= \{\text{def } f,\ 3 > 0,\ 2^\circ \text{ caso}\}$

$2 + f(2)$

$= \{\text{def } f,\ 2 > 0,\ 2^\circ \text{ caso}\}$

$2 + 2 + f(1)$

$= \{\text{def } f,\ 1 > 0,\ 2^\circ \text{ caso}\}$

$2 + 2 + 2 + f(\emptyset)$

$= \{\text{def } f,\ 1^\circ \text{ caso}\}$

$2 + 2 + 2 + \emptyset$

$2 + 2 + 2 + 0$

$= \{ \text{calcolo} \}$

6

$$f(3) = 6$$

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ f(n) = 2 \cdot n$$

per induzione

caso base $\quad f(0) = 2 \cdot 0$

caso induttivo

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}.\ f(n) = 2 \cdot n \Rightarrow f(n+1) = 2 \cdot (n+1) \right)$$

---

caso base $\quad f(0) = 2 \cdot 0$

$f(0)$

$= \{ \text{def } f,\ 1^\circ \text{ caso} \}$

0

$= \{ \text{calcolo} \}$

$2 \cdot 0$

---

caso induttivo $\quad f(n) = 2 \cdot n \Rightarrow \underline{\underline{f(n+1) = 2 \cdot (n+1)}}$

ip. induttiva

$f(n+1)$

$f(n+1)$

$= \{ \text{def } f,\ n+1>0,\ 2° \text{ caso} \}$

$2 + f(n)$

$= \{ \text{ip. induttiva} \}$

$2 + 2 \cdot n$

$= \{ \text{calcolo} \}$

$2 \cdot (n+1)$

lunedì 19 novembre 2018 10:30

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ 2 + f(n-1) & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

$$\boxed{f(n) = 2 \cdot n}$$

Si progetta per il caso base

$$f(0) = 2 \cdot 0 = 0$$

Se so il valore di $f(n) = 2 \cdot n$ so progettare il valore di $f(n+1)$

$$f(n) = 2 \cdot n$$

$$f(n+1) = \underline{2 \cdot (n+1)} = 2n + \underline{2} =$$

$$f(n) + 2$$

$$f(n) = 2 \cdot n \qquad f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ f(n-1) + 2 & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

$$\cancel{f(n+1) = }$$

$$\boxed{f(n) = 3 \cdot n + 3}$$

caso base $\quad f(\cancel{0}) = 3 \cdot \cancel{0} + 3 = 3$

caso induttivo

$$f(n) = 3 \cdot n + 3$$

$$f(n+1) = 3 \cdot (n+1) + 3 = 3n + 3 + 3 =$$

$$f(n) + 3$$

$$f(n) = \begin{cases} 3 & \text{se } n = 0 \\ f(n-1) + 3 & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$f(n,m) = 3n + 2m + 2$$

Induzione <u>BEN FONDATA</u>

Un insieme A con una RELAZIONE DI PRECEDENZA ($<, \sqsubset, \ldots$) su A

$\boxed{\text{Relazione non riflessiva} \quad a < a \quad \underline{\text{no}}}$

si dice ben fondato se non ci sono catene infinite discendenti.

$(\mathbb{Z}, <)$ non è ben fondato

. 3
|
2
|
1
|

catene infinite discendente

$\emptyset$

$|$

-1

$\vdots$

$(\mathbb{N}, <)$ ben fondato

3

$|$

2

$|$

1

$|$

$\underline{\emptyset}$

A con una relazione di precedenza ben fondata

$(A, \sqsubseteq)$ ben fondato

Si può fare induzione ben fondata.

- Casi base: tutti i minimali (possono essere più di uno) rispetto a $\sqsubseteq$
- Casi induttivi: supponendo la proprietà vera sugli elementi che precedono, secondo $\sqsubseteq$, si riesce a dimostrare la proprietà su quelli che seguono.

Per induzione ben fondata si può concludere che la proprietà vale su tutto l'insieme A lunedì 19 novembre 2018 10:46

$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\boxed{f(n,m) = 3 \cdot n + 2 \cdot m + 2}$$

il dominio di f sono coppie di naturali

$$\left(\forall n, m, n', m' \in \mathbb{N}.\ (n,m) \sqsubset (n',m') \equiv n = n'-1 \land m = m'-1\right)$$

$(3,5)$ — $(2,4)$ — $(1,3)$ — $(\emptyset,2)$

$(2,7)$ — $(1,6)$ — $(\emptyset,5)$

$(3,2)$ — $(2,1)$ — $(1,\emptyset)$

$$\left(\forall m \in \mathbb{N}.\ (\emptyset, m)\right) \qquad \left(\forall n \in \mathbb{N}.\ (n, \emptyset)\right)$$

$$f(n, \varnothing) = 3 \cdot n + 2 \cdot \varnothing + 2 = 3 \cdot n + 2$$

$$f(\varnothing, m) = 3 \cdot \varnothing + 2 \cdot m + 2 = 2m + 2$$

$$f(n, m) = 3 \cdot n + 2 \cdot m + 2$$

$$f(n+1, m+1) = 3 \cdot (n+1) + 2 \cdot (m+1) + 2 =$$

$$3n + 3 + 2m + 2 + 2 = f(n, m) + 5$$

$f(n, m)$

$$f(n) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } n = 0 \\ f(n-1) + 2 & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Grafico di una funzione f:
l'insieme delle coppie

$$\{ \langle \underbrace{n}_{\text{argomento}}, \underbrace{f(n)}_{\text{risultato}} \rangle \}$$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\qquad f(n) = 2 \cdot n$

il suo grafico è

$$\{ \langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 6 \rangle \ldots\ldots \}$$

data $f : A \to B$

il suo grafico F è

$$F = \{ \langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B, b = f(a) \}$$

$$f(n) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

$$f(n) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } n = 0 \\ \underline{f(n-1)} + 2 & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

se $f(n-1)$ vale m

$F = \{\langle \emptyset, \emptyset \rangle\} \cup$ allora $f(n)$ vale $m+2$

$$\{\langle \underline{n+1}, \underline{m+2} \rangle \mid \langle n, m \rangle \in \underline{F}\}$$

$$T(X) = \{(\emptyset, \emptyset)\} \cup \{\langle n+1, m+2 \rangle \mid \langle n, m \rangle \in X\}$$