Teoria delle ricorsioni

Equazione ricorsiva

$$x = f(x)$$

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$f(x) = x + 1$ $\quad x = f(x)$ non ha soluzioni

$f(x) = 2 \cdot x$ $\quad x = f(x)$ una soluzione $(x = \emptyset)$

$f(x) = x$ $\quad x = f(x)$ ha infinite soluzioni.

La teoria delle ricorsione ci dice quando una eq. ricorsiva ha soluzione e, nel caso in cui ci siano più soluzioni, quale dobbiamo prendere.

mercoledì 14 novembre 2018 11:22

Equazioni ricorsive su INSIEMI

(poi vedremo che i risultati si potranno applicare anche a equazioni ricorsive su funzioni, ovvero si potranno applicare a DEFINIZIONI RICORSIVE DI FUNZIONI)

Dato un insieme A (finito o infinito)

$\mathbb{P}_A$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A.

powerset di A

$(\wp_A)$

$A = \{\emptyset, 1, 2\}$

$\mathbb{P}_A = \{\{\}, \{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{\emptyset, 1\}, \{\emptyset, 2\}, \{1, 2\}, \{\emptyset, 1, 2\}\}$

$$\boxed{\{\emptyset, 1\} = \{1, \emptyset\} \text{ no ordine}}$$

$\mathbb{N}$

$\mathbb{P}_{\mathbb{N}} = \{\{\}, \{\emptyset\}, \ldots, \{\emptyset, 1\} \ldots,$

insieme dei naturali pari, $\ldots\}$

infinito

$$T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$$

A insieme qualsiasi

T è una funzione che ha come argomento un insieme $\in \mathbb{P}_A$ e come risultato un insieme $\in \mathbb{P}_A$

(si chiama anche TRASFORMAZIONE di insiemi in insieme)

$\mathbb{N}$

$$T : \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$$

$$T(\underset{\substack{\uparrow \\ \in \mathbb{P}_{\mathbb{N}}}}{x}) = \underbrace{x \cup \{1\}}_{\in \mathbb{P}_{\mathbb{N}}}$$

$\{0, 2\} \in \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$ $\qquad T(\{0,2\}) = \{0, 1, 2\}$

$\{0, 1\} \in \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$ $\qquad T(\{0,1\}) = \{0, 1\}$ $\qquad \cancel{\{0, 1, 1\}}$

$x = T(x)$ eq. ricorsiva su insiemi

quali sono le soluzioni?

Tutti i sottoinsiemi dei $\mathbb{N}$ che contengono il valore 1.

$$\{\emptyset, 1\} = T(\{\emptyset, 1\}) = \{\emptyset, 1\}$$

$$\{\emptyset, 2\} \neq T(\{\emptyset, 2\}) = \{\emptyset, 1, 2\}$$

Le soluzioni di $x = T(x)$ si chiamano anche PUNTI FISSI di T

(cioè $T(x) = x$)

$$T : \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$$

$$T(x) = \mathbb{N} \setminus x$$

sottrazione tra insiemi
(toglie dal primo insieme
i valori del secondo)

$$\{0, 1, 2\} \setminus \{2, 3\} = \{0, 1\}$$

$$T(x) = N \setminus x$$

$$x = T(x)$$ ha soluzioni?

NO!

$$\{\} \neq T(\{\}) = N \setminus \{\} = N$$

$T(x)$ non ha punti fissi

mercoledì 14 novembre 2018 11:40

$$T : \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$$

$$\boxed{T(X) = \{\emptyset\} \cup \{m \mid m-2 \in X\}}$$

$$T(\{\emptyset, 2\}) = \{\emptyset\} \cup \{m \mid \underline{m-2 \in \{\emptyset, 2\}}\}$$

$m-2 = 0 \Rightarrow m = 2$

$m-2 = 2 \Rightarrow m = 4$

$$= \{\emptyset, 2, 4\} \qquad T(X) = X$$

$$T(X) = \{\emptyset\} \cup \{m \mid m-2 \in X\}$$

$\mathbb{N}$

$T(\mathbb{N})$

$= \{\text{def } T\}$

$\{\emptyset\} \cup \{m \mid m-2 \in \mathbb{N}\}$

$= \{\text{calcolo}\}$

$\{\emptyset, 2, 3, 4 \ldots\ldots\}$

$m-2=\emptyset \Rightarrow m=2$

$m-2=1 \Rightarrow m=3$

$m-2=2 \Rightarrow m=4$

$\vdots$

$\{\emptyset, 2, 3, 4, \ldots\}$

$\neq$

$\mathbb{N}$

$+(\mathbb{N}) \neq \mathbb{N}$

$$T(\{\emptyset, 2, 3, 4 \ldots\})$$

$$\stackrel{\{def\ T\}}{=} \{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in \{\emptyset, 2, 3, 4 \ldots\}\}$$

$$\stackrel{\{calcolo\}}{=} \{\emptyset, 2, 4, 5, 6 \ldots\} \neq$$

$n-2=0 \Rightarrow n=2$

$n-2=2 \Rightarrow n=4$

$n-2=3 \Rightarrow n=5$

$n-2=4 \Rightarrow n=6$

$\vdots$

$$T(X) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in X\}$$

$$T(\{\emptyset, 2, 4, 6, \ldots\})$$

$$\stackrel{\{def\ T\}}{=} \{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in \{\emptyset, 2, 4, 6 \ldots\}\}$$

$$\stackrel{\{calcolo\}}{=} \{\emptyset, 2, 4, 6 \ldots\}$$

$X = T(X)$

$n-2=\emptyset \Rightarrow n=2$

$n-2=2 \Rightarrow n=4$

$n-2=4 \Rightarrow n=6$

$\vdots \qquad \vdots$

L'insieme dei naturali pari è

L'insieme dei materiali pari è punto fisso di T, cioè è soluzione della eq. ricorsiva $x = T(x)$

UNICA SOLUZIONE

Una trasformazione $T : \mathcal{P}_A \to \mathcal{P}_A$

è **MONOTONA** sse

$$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow T(X_1) \subseteq T(X_2) \qquad X_1, X_2 \in \mathcal{P}_A$$

$T(X) = X \cup \{1\}$ $\qquad T : \mathcal{P}_{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$

è monotona!

1) $X_1 \subseteq X_2$ contengono 1 ($1 \in X_1$, $1 \in X_2$)

$T(X_1) = X_1$

$T(X_2) = X_2$

$$T(X_1) \subseteq T(X_2)$$

2) $X_1 \subseteq X_2$ ma $1 \notin X_1$ e $1 \notin X_2$

$T(X_1) = X_1 \cup \{1\}$

$T(X_2) = X_2 \cup \{1\}$

$X_1 \cup \{1\} \subseteq X_2 \cup \{1\}$ cioè

$T(X_1) \subseteq T(X_2)$

3) $X_1 \subseteq X_2 \qquad 1 \notin X_1 \,,\; 1 \in X_2$

$$T(X_1) = X_1 \cup \{1\}$$

$$T(X_2) = X_2$$

dato che $X_1 \subseteq X_2 \wedge 1 \in X_2 \Rightarrow$

$$X_1 \cup \{1\} \subseteq X_2$$

$T(X) = X \cup \{1\}$ è monotone!!

$T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$

è CONTINUA sse

per ogni CATENA di insiemi $X_0, X_1, X_2 \ldots$

$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots$ (finita o infinita)

abbiamo

$$\bigcup_{i \geq 0} T(X_i) = T\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right)$$

$$T : \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$$

$T(X) = X \cup \{1\}$ è continua?

SI!

$X_0, X_1, X_2 \dots \in \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$

$X_\emptyset \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$

$$T\Big(\bigcup_{i \geq 0} X_i\Big) = \bigcup_{i \geq 0} T(X_i) \quad ?$$

$$\bigcup_{i \geq 0} T(X_i)$$

$= \{\text{def } T\}$

$$\bigcup_{i \geq 0} (X_i \cup \{1\})$$

$= \{\text{proprietà dell'} \cup\}$

$$\Big(\bigcup_{i \geq \emptyset} X_i\Big) \cup \{1\} \qquad = \qquad A \cup \{1\}$$

$= \{\text{def } T\} \qquad = T(A)$

$$T\left(\bigcup_{i\geq 0} X_i\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} T(X) = X \cup \{1\} \\ \text{è continua} \end{array}}$$

$$T : \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$$

$$T(x) = \begin{cases} \{1\} & \text{se } x \text{ è infinito} \\ \{\} & \text{se } x \text{ è finito} \end{cases}$$

$$T(\{0,1,2\}) = \{\}$$

$$T(\mathbb{N}) = \{1\}$$

$$T(\mathbb{N}pari) = \{1\}$$

T è monotona?

1) $X_1 \subseteq X_2$ entrambi finiti

$T(X_1) = \{\}$ $\quad T(X_2) = \{\}$

quindi $T(X_1) \subseteq T(X_2)$

2) $X_1 \subseteq X_2$ entrambi infiniti

$T(X_1) = \{1\}$ $\quad T(X_2) = \{1\}$

quindi $T(X_1) \subseteq T(X_2)$

quindi $T(x_1) \subseteq T(x_2)$

3) $x_1 \subseteq x_2$ x_1 finito, x_2 infinito

$T(x_1) = \{\}$ $T(x_2) = \{1\}$

quindi $T(x_1) \subseteq T(x_2)$

T è monotona!

$$T(X) = \begin{cases} \{1\} & \text{se } X \text{ è infinito} \\ \{\} & \text{se } X \text{ è finito} \end{cases}$$

è continua? NO!

Prendiamo le catene

$$\{0\} \subseteq \{0,1\} \subseteq \{0,1,2\} \ \ldots$$

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots$$

infinità di sottoinsiemi finiti dei numeri naturali.

$$\bigcup_{i \geq 0} X_i = \mathbb{N}$$

$$\bigcup_{i \geq 0} T(X_i) = \{\}$$

$$T\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right) = T(\mathbb{N}) = \{1\}$$

<u>T è monotona ma non è continua</u>

mercoledì 14 novembre 2018 12:34

Notazione: $T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$

$$T^{\emptyset}(\{\}) = \{\}$$
$$T^{1}(\{\}) = T(\{\})$$
$$T^{2}(\{\}) = T(T(\{\}))$$
$$T^{3}(\{\}) = T(T(T(\{\})))$$
$$\vdots$$

$$T^{\emptyset}(\{\}) = \{\}$$
$$T^{n}(\{\}) = T(T^{n-1}(\{\})) \quad \text{con } n > 0$$

Teorema di ricorsione

Data $T: \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ continua

1) $I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\})$ è un punto fisso di T

(se T è continua esiste un punto fisso e il teo. di ricorsione ci dice come calcolarlo)

2) per ogni altro punto fisso J $(J = T(J))$ abbiamo che $I \subseteq J$

(I è il minimo punto fisso è la soluzione di riferimento della eq. ricorsiva $X = T(X)$)

mercoledì 14 novembre 2018 12:42

$$T : P_{\mathbb{N}} \to P_{\mathbb{N}}$$

$$T(X) = X \cup \{1\}$$

$$I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\})$$

$$T^{\emptyset}(\{\}) = \{\}$$

$$T^1(\{\}) = T(\{\}) = \{\} \cup \{1\} = \{1\}$$

$$T^2(\{\}) = T(T^1(\{\})) = T(\{1\}) = \{1\} \cup \{1\} = \{1\}$$

$$I = \bigcup_{i \geq \emptyset} T^i(\{\}) = \{1\}$$

$$T(X) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in X\}$$

$$T^0(\{\}) = \{\}$$

$$T^1(\{\}) = T(\{\}) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in \{\}\} = \{\emptyset\}$$

$$T^2(\{\}) = T(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, 2\}$$

$$n-2 = \emptyset \Rightarrow n = 2$$

$$T^3(\{\}) = T(\{\emptyset, 2\}) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in \{\emptyset, 2\}\} = \{\emptyset, 2, 4\}$$

$$n-2 = \emptyset \Rightarrow n = 2$$

$$n-2 = 2 \Rightarrow n = 4$$

$$\vdots$$

$$\boxed{T^i(\{\}) \subseteq T^{i+1}(\{\})}$$

Lemma:

mercoledì 14 novembre 2018 12:50

$T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$

T continua $\Rightarrow$ T monotona

Dim. $\underline{X_1 \subseteq X_2} \Rightarrow X_1 \cup X_2 = X_2$

$T(X_2)$

$= \{$ usiamo le proprietà $X_1 \cup X_2 = X_2 \}$

$T(X_1 \cup X_2)$

$= \{ T$ è continua $\bigcup_{i=1,2} T(X_i) = T\left(\bigcup_{i=1,2} X_i\right) \}$

$T(X_1) \cup T(X_2)$

$T(X_2) = T(X_1) \cup T(X_2) \Rightarrow T(X_1) \subseteq T(X_2)$

mercoledì 14 novembre 2018 12:54

Lemma

Data $T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ continua allora

$$T^i(\{\}) \subseteq T^{i+1}(\{\})$$

Si dimostra per INDUZIONE

Principio di induzione naturale (su $\mathbb{N}$)

Per dimostrare una proprietà P su tutti i valori naturali è sufficiente far vedere che:

1) la proprietà P vale su $\emptyset$ (caso base)
2) supponendo la proprietà P vera su $n \in \mathbb{N}$ qualsiasi si dimostra che la proprietà vale su $n+1$. (caso induttivo)