Teorema di ricorsione

giovedì 16 novembre 2017 16:07

ci dice che le definizioni ricorsive (con certe proprietà) hanno una soluzione di riferimento che è il minimo punto fisso (ci dice come calcolarlo)

---

definito su insiemi

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(n) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } n = \emptyset \\ 2 + f(n-1) & \text{se } n > \emptyset \end{cases}$$

$f(2)$

$= \{\text{def. } n \leftarrow 2, \text{ calcoliamo}\}$

$2 + f(1)$

$= \{\text{def}, n \leftarrow 1, \text{ calcoliamo}\}$

$2 + 2 + f(\emptyset)$

$= \{\text{def}, n \leftarrow \emptyset, \text{ calcoliamo}\}$

$= \{ \text{def}, \ n \leftarrow \emptyset, \ \text{calcoliamo} \}$

$2 + 2 + \emptyset$

$= \{ \text{calcolo} \}$

4

$$f(n) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } n = \emptyset \\ 2 + f(n-1) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

grafico di una funzione

insieme di coppie $\{ \langle n, m \rangle \mid m = f(n) \}$

$$f(n) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } n = \emptyset \\ \underline{2} + f(n-1) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$F = \{ \langle \emptyset, \emptyset \rangle \} \cup \{ \langle n, m+2 \rangle \mid \langle n-1, m \rangle \in F \}$

se il valore di $f(n-1)$ è m allora il risultato di $f(n)$ è $m+2$

$F = T(F)$

$T(X) = \{ \langle \emptyset, \emptyset \rangle \} \cup \{ \langle n, m+2 \rangle \mid \langle n-1, m \rangle \in X \}$

$T : \mathbb{P}_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$

l'insieme delle coppie di

(l'insieme delle coppie di
materiali

Prodotto cartesiano

$$T(X) = \{\langle\emptyset,\emptyset\rangle\} \cup \{\langle n, m+2\rangle \mid \langle n-1, m\rangle \in X\}$$

$$T^{\emptyset}(\{\}) = \{\}$$

$$T^{1}(\{\}) = \{\langle\emptyset,\emptyset\rangle\} \cup \{\langle n, m+2\rangle \mid \langle n-1, m\rangle \in \{\}\}$$

$$= \{\langle\emptyset,\emptyset\rangle\}$$

$$T^{2}(\{\}) = T(\{\langle\emptyset,\emptyset\rangle\}) =$$

$$\{\langle\emptyset,\emptyset\rangle\} \cup \{\langle n, m+2\rangle \mid \langle n-1, m\rangle \in \{\langle\emptyset,\emptyset\rangle\}\}$$

$$\langle n-1, m\rangle \in \{\langle 0,0\rangle\}$$

$$n-1=0$$

$$m=0$$

$$= \{\langle\emptyset,\emptyset\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$$

$\vdots$

PRINCIPIO DI INDUZIONE NATURALE

giovedì 16 novembre 2017 16:29

Se vuoi definire una funzione ricorsiva su $\mathbb{N}$ devi:

- definirla in $\emptyset$ — Caso base
- supponendo che la funzione sia definita correttamente in $n-1$ cerchiamo di definirla su n.

Caso induttivo

Definisci una funzione ricorsiva

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

che calcola il doppio dell'argomento.

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

Supponiamo che $f(n-1) = 2 \cdot (n-1)$ correttamente calcoli il doppio di $n-1$.

Come posso definire $f(n)$ avendo $f(n-1)$? basta aggiungere a

$f(n-1)$ il valore 2

$$\boxed{f(n) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } n = \emptyset \\ 2 + f(n-1) & \text{altrimenti} \end{cases}}$$

$$f(n) = 2 \cdot n$$

proprietà da dimostrare

Caso base

$$f(\emptyset) = 2 \cdot \emptyset$$

Caso induttivo

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ f(n) = 2 \cdot n \implies f(n+1) = 2 \cdot (n+1)$$

giovedì 16 novembre 2017 16:37

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ 2 + f(n-1) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Caso base $(f(0) = 2 \cdot 0)$

$f(0)$

$= \{$ def. f, 1° caso $\}$

0

$= \{$ calcolo $\}$

$2 \cdot 0$

Caso induttivo

$\forall n \in \mathbb{N}$

$f(n) = 2 \cdot n$ ip. induttiva

$\Longrightarrow$

$f(n+1) = 2 \cdot (n+1)$

$f(n+1)$

$= \{$ def f, 2° caso $\}$

$2 + f(n)$

$= \{$ ip. indutt. $\}$

$2 + 2 \cdot n$

$= \{$ calcolo $\}$

$2 \cdot (n+1)$

Progettare una funzione ricorsiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che calcola

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ f(n) = \underline{3 \cdot n + 1}$$

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 3 + f(n-1) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Caso base

$$f(0) = 3 \cdot 0 + 1 = 1$$

Caso induttivo $(n > 0)$

$$\cancel{f(n) = 3 \cdot n + 1 \Rightarrow f(n+1) = 3 \cdot (n+1) + 1}$$

$$f(\underline{n-1}) = 3 \cdot (n-1) + 1 \Rightarrow f(\underline{n}) = 3 \cdot n + 1$$

$f(n)$

$= \{$ def. f, 2° caso $\}$

$3 + f(n-1)$

$= \{$ ip. induttiva $f(n-1) = 3 \cdot (n-1) + 1$

$= \{$ ip. induttiva $f(n-1) = 3 \cdot (n-1) + 1$

$3 + 3n - 2$

$= \{$ calcolo $\}$

$3 \cdot n + 1$

$$f(n) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } n \le 1 \quad \cancel{\text{se } n = \emptyset \text{ o } n = 1} \\ 1 + f(n-2) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$f(\emptyset)$
$f(1)$

Se conosco il valore di $f(n-2)$ riesco a definire $f(n)$

Non è il principio di induzione naturale.

$$P(\emptyset)$$
$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

Principio di induzione BEN FONDATO

Relazione di PRECEDENZA

P.I. naturale si basa sulla precedenza $\prec$ tale che

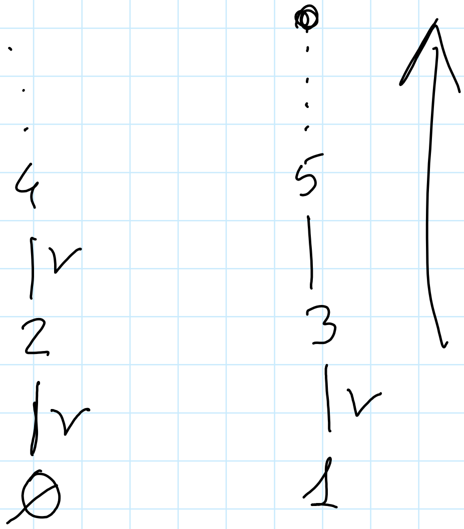
$$n-1 \prec n$$

$$n-2 \prec n$$

Un insieme A con una relazione di precedenza $\prec$ si dice BEN FONDATO se <u>non esistono</u> catene infinite discendenti secondo $\prec$

$\mathbb{N}$

$n-2 < n$



minimali della precedenza

Dimostrare la proprietà sui minimali. Supponendo la proprietà vera su un elemento che precede riesco a dimostrarla vera sull'elemento che segue

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \leq 1 \\ 1 + f(n-2) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N}. \quad f(n) = n/2$

quoziente della divisione

divisione intera

$2/2 = 1$

$3/2 = 1$

Casi base

$f(0) = 0/2$

$f(1) = 1/2$

$f(0)$

$= \{\text{def. } 1^\circ \text{ caso}\}$

0

$= \{\text{calcolo}\}$

$0/2$

$f(1)$

$= \{\text{def } f,\ 1^\circ \text{ caso}\}$

0

$= \{\text{calcolo}\}$

$1/2$

Caso induttivo $(n \geq 2)$

$f(n-2) = n-2/2 \Rightarrow f(n) = n/2$

$f(n)$

$= \{$ def f, $n \geq 2$, 2° caso $\}$

$1 + f(n-2)$

$= \{$ ip. induttiva $\}$

$1 + (n-2)/2$

$= \{$ calcolo $1 + (n-2)/2 = n/2 \}$

$n/2$

$\forall n, m \in \mathbb{N}.\ g(n,m) = \underline{3 \cdot n + m + 2}$

giovedì 16 novembre 2017 17:06

$$g(n,m) = \begin{cases} m+2 & n=0 \\ 3 + g(\underline{n-1,m}) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Caso base $\quad g(0,m) = 3 \cdot \cancel{0} + m + 2$

$\qquad = m+2$

<u>Caso induttivo</u> $(n>0)$

$$g(n-1,m) = 3(n-1) + m + 2 \quad \text{ip. ind.}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\underline{g(n,m) = 3 \cdot n + m + 2}$$

$g(n,m)$

$= \{\text{def } g,\ n>0,\ 2^{\circ} \text{ caso}\}$

$\underline{3+}\ g(n-1,m)$

$= \{\text{ip. ind.}\}$

=

$$\forall n \in \mathbb{N}. \quad g(n) = 3 \cdot n + m + 2$$

$$g(n,m) = \begin{cases} 2 & \text{se } n=0 \text{ e } m=0 \\ \cancel{1}\,3+ g(n-1,m) & \text{se } n>0 \\ \cancel{2}\,1+ g(n,m-1) & \text{se } n=0 \text{ e } m>0 \end{cases}$$

$\langle n, m \rangle$ $\quad n>0$

$\langle n-1, m \rangle$

$\vdots$

$\langle 0, m \rangle$

$\langle 0, m-1 \rangle$

$\vdots$

$\langle 0, 0 \rangle$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Caso base $\quad g(0,0) = 3 \cdot 0 + 0 + 2$ (Vero)

Caso induttivo 1 $\quad (n>0)$

$g(n-1,m) = 3 \cdot (n-1) + m + 2$ Ip. induttiva

$\Rightarrow$

$$\Longrightarrow$$

$$g(n,m) = 3 \cdot n + m + 2$$

$g(n,m)$

$= \{$ def g, $n>0$, 2° caso $\}$

$3 + \underline{}_1 \; g(n-1,m)$

$= \{$ ip. induttiva $\}$

$3 + \underline{}_1 \; 3\cdot(n-1) + m + 2$

$= \{$ calcolo $\}$

$3 + \underline{}_1 \; 3n - 3 + m + 2$

$= \{$ calcolo $\}$

$3 \cdot n + m + 2$

2° caso induttivo $(n=0, m>0)$

$$g(0, m-1) = 3 \cdot 0 + (m-1) + 2$$

ip. ind.

$$\Longrightarrow$$

$$g(0,m) = 3 \cdot 0 + m + 2$$

$g(\emptyset, m)$

$= \{$ def. g, 3° caso $\}$

$1 +_2 g(\emptyset, m-1)$

$= \{$ ip. induttiva

$1 +_2 3 \cdot \emptyset + m - 1 + 2$

$= \{$ calcolo $\}$

$1 +_2 3 \cdot \emptyset + m + 1$

$= \{$ calcolo $\}$

$3 \cdot \emptyset + m + 2$