

TEORIA DELLE DEFINIZIONI RICORSIVE

lunedì 13 novembre 2017 09:18

Definizione ricorsiva.

Definizione di un qualsiasi concetto
data in termini del concetto stesso.

Definizioni ricorsive di insiemi.

A insieme

$\mathcal{P}_A$ (parti di A) è l'insieme di tutti
i sottoinsiemi di A

Es: $A = \{\emptyset, 1, 2\}$

$$\mathcal{P}_A (\text{parti}) = \left\{ \{\}, \{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \right. \\ \left. \{\emptyset, 1\}, \{\emptyset, 2\}, \{1, 2\}, \{\emptyset, 1, 2\} \right\}$$

$$A = \{\emptyset, 1\}$$

$$B = \{1, \emptyset\}$$

$$A = B$$

A
 $\mathbb{P}_A$

una funzione $T: \mathbb{P}_A \rightarrow \mathbb{P}_A$
si chiama anche TRASFORMAZIONE
di $\mathbb{P}_A$ in $\mathbb{P}_A$

$$T: \mathbb{P}_N \rightarrow \mathbb{P}_N$$

$$T(X) = X \cup \{1\}$$

es:

$$T(\{\emptyset, 2\}) = \{\emptyset, 1, 2\}$$

$$T(\{1, 2\}) = \{1, 2\}$$

$$\{1, 1\} \notin \mathbb{P}_N$$

Definizione ricorsiva è data dalle
equazioni

$$X = T(X)$$

↪ equazioni ricorsive

le cui soluzioni sono tutte ge:

insiemi I tali che $\bar{I} = T(\bar{I})$
(PUNTI FISSI di T)

$$T: \mathbb{P}_N \rightarrow \mathbb{P}_N$$

tipo delle funzioni

$$T(x) = x \cup \{1\}$$

pono dunque una equazione (definisce) ricorsiva

$$x = T(x)$$

$$x = x \cup \{1\}$$

Quali sono le soluzioni di $x = x \cup \{1\}$ ($x = T(x)$)? Quali sono i punti fissi di $T(x) = x \cup \{1\}$?

$I = \{\emptyset\}$ - è punto fisso di $T(x) = x \cup \{1\}$?

- è soluzione dell'equazione

$$x = T(x) \text{ ovvero}$$

$$x = x \cup \{1\}$$

non è sol. delle def. ricorsive

$$I = \{\emptyset\} \quad T(I) = I \cup \{1\} = \{\emptyset, 1\}$$

$\mathcal{T} = \{\emptyset, 1, 2\}$ è soluzione di $x = x \cup \{1\}$?
no!

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, 1, 2\} \quad T(\mathcal{T}) = \{\emptyset, 1, 2\}$$

Quante soluzioni ci sono all'equazione
 $x = x \cup \{1\}$? $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$

Infinite!! Ci sono infinite punti
fissi

Ci sono equazioni ricorsive che
hanno infinita soluzioni

$$T: \mathcal{P}_N \rightarrow \mathcal{P}_N$$

$$T(X) = N \setminus X$$

↑ sottrazione tra insiemi

$$\{\emptyset, 3, 5\} \setminus \{2, 3\} = \{\emptyset, 5\}$$

$$X = T(X)$$

$$X = N \setminus X$$

$$I = \{\}$$

$$\{\} = N \setminus \{\}$$

falsa

non ha soluzioni.

T non ha punto fisso.

Ci sono equazioni ricorsive che
non hanno soluzioni!

$$T: \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$$

$$T(x) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in x\}$$

$$T(\{\emptyset, 1\}) = \{\emptyset, 2, 3\}$$

$n-2 \in \{\emptyset, 1\}$
non è soluzione

$$\begin{aligned} n-2 &= \emptyset \\ n-2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\underline{x = T(x)}$$

I un insieme finito ricorrenza a $T(I)$ c'è un valore che non compare in I .
Il valore $\max + 2$, dove $\max$ è il massimo valore di I .

$$x = T(x)$$

$$x = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in x\}$$

$$\mathbb{N} \neq \{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in \mathbb{N}\}$$

$$\{\emptyset, 2, 3, 4, \dots\} \neq \mathbb{N}$$

$$n-2 \in \mathbb{N}$$

$$n-2 = 0$$

$$n-2 = 1$$

$$n-2 = 2$$

⋮

$$\mathbb{N} \setminus \{1\} \neq \{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$$

//

$$n-2 = \emptyset$$

$$\mathbb{N} \setminus \{1\} \neq \{\emptyset, 2, 4, 5, \dots\}$$

$$n-2 = 2$$

$$n-2 = 3$$

$$\text{matranci: pari} = \{\emptyset, 2, 4, 6, 8, \dots\} = \mathbb{N}^2$$

$$\mathbb{N}^2 = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in \mathbb{N}^2\}$$

$$= \{\emptyset, 2, 4, 6, \dots\} = \mathbb{N}^2$$

$$n-2 = 0$$

$$n-2 = 2$$

$$n-2 = 4$$

⋮

A insieme

$\mathbb{P}_A$

Una trasformazione $T: \mathbb{P}_A \rightarrow \mathbb{P}_A$
(funzione)

si dice monotone

se per $x_1, x_2 \in \mathbb{P}_A$

$$x_1 \subseteq x_2 \Rightarrow T(x_1) \subseteq T(x_2)$$

$$T: \mathbb{P}_N \rightarrow \mathbb{P}_N$$

$$T(x) = x \cup \{1\}$$

è monotone?

$$\{\emptyset, 2\} \subseteq \{\emptyset, 2, 3\}$$

$$T(\{\emptyset, 2\}) \subseteq T(\{\emptyset, 2, 3\}) \quad ?$$

$$\{\emptyset, 1, 2\} \subseteq \{\emptyset, 1, 2, 3\} \quad \text{Vero}$$

$$\{\emptyset, 1\} \subseteq \{\emptyset, 1, 2\}$$

$$T(\{\emptyset, 1\}) = \{\emptyset, 1\}$$

$$T(\{\emptyset, 1\}) \subseteq T(\{\emptyset, 1, 2\})$$

$$X_1 \subseteq X_2$$

$$1 \in X_2$$

$$1 \notin X_1$$

$$T(X_1) \subseteq T(X_2)$$

||

$$X_1 \cup \{1\} \subseteq X_2$$

$$T(X) = X \cup \{1\}$$

$\bar{e}$ monotone

$$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow T(X_1) \subseteq T(X_2)$$

$$T: \mathcal{P}_N \rightarrow \mathcal{P}_N$$

$$T(x) = \begin{cases} \{ \} \\ \{1\} \end{cases}$$

$$n \# x > 2$$

$$n \# x \leq 2$$

non è monotona

$$X_1 = \{ \emptyset, 1 \}$$

$$X_2 = \{ \emptyset, 1, 3, 4 \}$$

$$T(\{ \emptyset, 1 \}) = \{1\}$$

$$T(\{ \emptyset, 1, 3, 4 \}) = \{ \}$$

vero

$$\{ \emptyset, 1 \} \subseteq \{ \emptyset, 1, 3, 4 \} \not\Rightarrow$$

falso

$$\underline{\underline{\{1\} \subseteq \{ \}}}$$

CONTINUITA'

lunedì 13 novembre 2017 10:04

Una trasformazione $T: \mathcal{P}_A \rightarrow \mathcal{P}_A$ si dice continua se presa una catena di insiemi $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{P}_A$

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \dots \quad \text{anche infinite}$$

si ha:

$$\bigcup_{i=1,2,3,\dots} T(X_i) = T\left(\bigcup_{i=1,2,3,\dots} X_i\right)$$

$$T: \mathcal{P}_N \rightarrow \mathcal{P}_N$$

$$T(X) = X \cup \{1\} \quad \text{è continua?}$$

Prendiamo

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \dots \quad X_i \in \mathcal{P}_N$$

$$\bigcup_i T(X_i) = \{ \text{definizione di } T \}$$

$$\begin{aligned}
 & \bigcup_i (x_i \cup \{1\}) \\
 &= \{ \text{proprietà di } v \} \\
 & \left(\bigcup_i x_i \right) \cup \{1\} \\
 & \underline{\underline{= \{ \text{def. di } T \}}} \\
 & T\left(\bigcup_i x_i\right)
 \end{aligned}$$

$$\bigcup_i T(x_i) = T\left(\bigcup_i x_i\right)$$

$$T(x) = x \cup \{1\}$$

$\bar{x}$ continue

$$T: \mathcal{P}_N \rightarrow \mathcal{P}_N$$

$$T(X) = \begin{cases} \{1\} & \text{se } X \text{ è infinito} \\ \{\} & \text{se } X \text{ è finito} \end{cases}$$

$$T(\{\emptyset, 1\}) = \{\}$$

$$T(\mathbb{N}) = \{1\}$$

$$T(\mathbb{N}^2) = \{1\}$$

T è monotona?

$$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow T(X_1) \subseteq T(X_2)$$

$X_1 \subseteq X_2$ se sono entrambi finiti

$$T(X_1) = \{\} \quad T(X_2) = \{1\}$$

$$\{\} \subseteq \{1\}$$

$X_1 \subseteq X_2$ enth.: infmt.

$$T(x_1) = \{1\} \quad T(x_2) = \{1\}$$

$$\{1\} \subseteq \{1\}$$

$$X_1 \subseteq X_2$$

X_n is finite

X_2 ist infinit

$$T(x_1) = \{ \}$$

$$T(x_2) = \{1\}$$

$$\{ \} \subseteq \{ 1 \}$$

T e mow to me!

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow T(x_1) \leq T(x_2)$$

$$T(x) = \begin{cases} \{1\} & \text{se } x \text{ è finito} \\ \{1\} & \text{se } x \text{ è infinito} \end{cases}$$

T è continua?

$$T: \mathcal{P}_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$$

$$x_1 = \{\emptyset\}$$

$$x_2 = \{\emptyset, 1\}$$

$$x_3 = \{\emptyset, 1, 2\}$$

$\vdots$

$$x_1 \subseteq x_2 \subseteq x_3 \dots$$

catene infinite di
sottoinsiemi finiti
dei naturali

$$\bigcup_i x_i = \mathbb{N}$$

$$\bigcup_i \underline{T(x_i)} = \{1\}$$

$\neq$

$$T\left(\bigcup_i x_i\right) = T(\mathbb{N}) = \{1\}$$

$$T\left(\bigcup_i X_i\right) = T(\mathbb{N}) = \{1\}$$

non è continue.

Date $T: \mathbb{P}_A \rightarrow \mathbb{P}_A$

T continue $\Rightarrow T$ monotone

Dimostrazione

$$X_1, X_2 \in \mathbb{P}_A$$

$$X_1 \subseteq X_2$$

$$T(X_2) = \{ X_1 \subseteq X_2 \text{ implici } X_1 \cup X_2 = X_2 \}$$

$$T(X_1 \cup X_2) = \{ T \text{ continue } \underbrace{T(X_1 \cup X_2) = T(X_1) \cup T(X_2)}_{T(\bigcup_i X_i) = \bigcup_i (T(X_i))} \}$$

$$T(X_1) \cup T(X_2)$$

Ho dimostrato che $T(X_2) = T(X_1) \cup T(X_2)$

ma questo vuol dire che $T(X_1) \subseteq T(X_2)$

$$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow T(X_1) \subseteq T(X_2)$$

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow T(x_1) \leq I(x_2)$$

No termine

lunedì 13 novembre 2017

10:40

$$T: \mathbb{P}_A \rightarrow \mathbb{P}_A$$

$$T(\lambda\lambda) = T^1(\lambda\lambda)$$

$$T(T(\lambda\lambda)) = T^2(\lambda\lambda)$$

$$T(T(T(\lambda\lambda))) = T^3(\lambda\lambda)$$

;

$$\lambda\lambda = T^0(\lambda\lambda)$$

Teorema di ricorsione

lunedì 13 novembre 2017 10:42

Dato $T: \mathbb{P}_A \rightarrow \mathbb{P}_A$ continua

1) $I = \bigcup_i T^i(\{ \})$ è un punto fisso di T (cioè è soluzione di $x = T(x)$)

2) per ogni altro J , tale che J è punto fisso di T ($J = T(J)$), abbiamo $I \subseteq J$

Se $T: \mathbb{P}_A \rightarrow \mathbb{P}_A$ è continua allora esiste un punto fisso $\left(\bigcup_i T^i(\{ \}) \right)$ e questo punto fisso è minimo.

Cioè I è la soluzione di riferimento delle equazioni ricorsive

$$x = T(x)$$

$$T: \mathcal{P}_N \rightarrow \mathcal{P}_N$$

$$T(X) = \underline{X \cup \{1\}}$$

$$T^0(\{1\}) = \{1\}$$

$$T^1(\{1\}) = \{1\} \cup \{1\} = \{1\}$$

$$T^2(\{1\}) = \{1\} \cup \{1\} = \{1\}$$

$$T^3(\{1\}) = \{1\}$$

$$T^2(\{1\}) = T(T^1(\{1\}))$$

$$T^n(\{1\}) = T(T^{n-1}(\{1\}))$$

$$\bigcup_i T^i(\{1\}) = \{1\}$$

$$T(X) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in X\}$$

$$T^0(\{1\}) = \{1\}$$

$$T^1(\{1\}) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in \{1\}\} = \{\emptyset\}$$

$$T^2(\{1\}) = T(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, 2\}$$

$$T^3(\{1\}) = T(\{\emptyset, 2\}) =$$

$$\{\emptyset\} \cup \{m \mid m-2 \in \{\emptyset, 2\}\} =$$

$$\{\emptyset, 2, 4\}$$

$$m-2=\emptyset$$

$$m-2=2$$

$$\bigcup_i T^i(1)$$

in questo caso $\bar{e}$
 l'insieme dei naturali
 pari

Principio di induzione naturale

Dato una proprietà P su

naturali:

si dice $P(n)$ o la proprietà P è vera sul naturale n , $n \in \mathbb{N}$.

Principio di induzione naturale

se $P(0)$ e $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ per
ogni $n \in \mathbb{N}$

allora P è vera su tutti i
naturali.

Principio di induzione naturale

$(P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}. P(n) \Rightarrow P(n+1))$

$\Rightarrow$

$(\forall n \in \mathbb{N}. P(n))$

Dimostrazione:

per assurdo:

supponiamo di aver dimostrato

$$P(\emptyset) \\ \forall n \in \mathbb{N}. P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

e mostriamo che

$$\exists n \in \mathbb{N}. \neg P(n).$$

Prendiamo l'elemento minimo tra quelli n cui vale $\neg P(n)$, chiamandolo m ,

m non può essere $= \emptyset$ perché abbiamo dimostrato $P(\emptyset)$

$m > 0$, in questo caso m non può essere il minimo di quelli per cui vale $\neg P(n)$ perché

$$\forall n \in \mathbb{N}. P(n) \Rightarrow P(n+1) \equiv$$

$$\forall n \in \mathbb{N}. \neg P(n+1) \Rightarrow \neg P(n)$$

$$\neg P(m) \Rightarrow \neg P(m-1) \text{ e questo}$$

contraddice il fatto che m
sia minimo.