PUMPING LEMMA

giovedì 19 ottobre 2017 16:07

Serve per dimostrare che un linguaggio non è regolare.

L regolare $\Rightarrow$

esiste un valore $n \in \mathbb{N}$ tale che, ogni stringa di L di lunghezza maggiore o uguale a n, w, può essere divisa in tre parti x, y e z ($w = xyz$) tali che valgono le seguenti proprietà

- $|xy| \leq n$
- $y \neq \varepsilon$
- $xy^i z \in L$ per ogni $i \in \mathbb{N}$

Dimostrazione.

giovedì 19 ottobre 2017 16:14

(Principio delle buche dei piccioni
(pigeon hole))

L è regolare. Allora esiste un ASF A che riconosce L. ASF ha un numero finito di stati, supponiamo k.

$w \in L \quad |w| \geq k$.

Se $w \in L$ l'ASF A la riconosce.

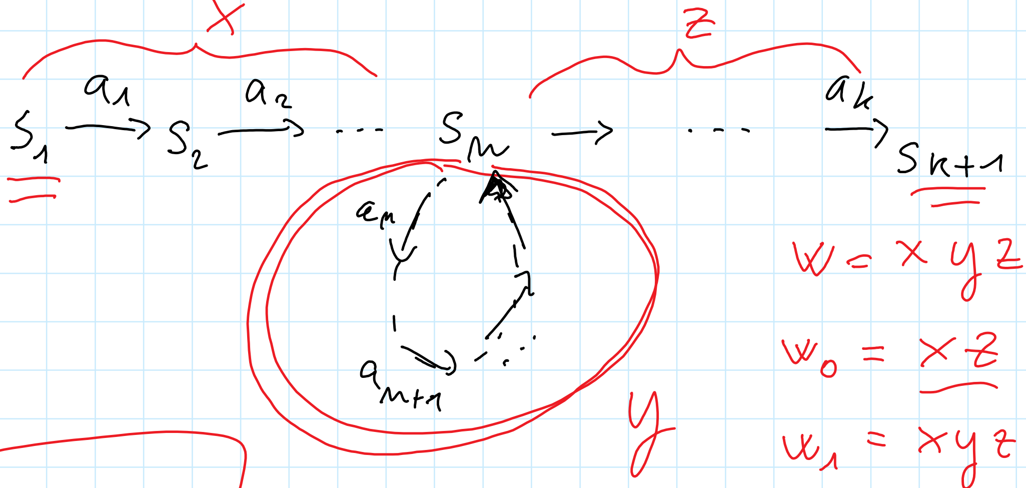
$$s_1 \xrightarrow{a_1} s_2 \longrightarrow \dots \xrightarrow{a_k} s_{k+1}$$

s_1 iniziale

$s_k \in F$

$$a_1 \dots a_{k-1} = w$$

Poiché l'automa attraversa $k+1$ stati, uno stato deve essere ripetuto



$w = xyz$

$w_0 = xz \in L$

$w_1 = xyz \in L$

$w_2 = xyyz \in L$

$|y \neq \varepsilon|$

$$y \neq \varepsilon$$

$$|xy| \leq \text{numero di stati } k$$

$$xy^i z \in L \quad \text{per ogni } i \in \mathbb{N}$$

$w_2 = xyyz \in L$

$w_3 = xyyyz \in L$

$$L = \{a^n b^m \mid n, m > 0\}$$

$$w = \underbrace{a}_{x}\underbrace{a}_{y}\underbrace{bbb}_{z}$$

$w_0 = xz = abbb$

$w_1 = xyz = aabbb$

$w_2 = xyyz = aaabbb$

PUMPING LEMMA

giovedì 19 ottobre 2017 16:26

L reg $\Longrightarrow$ valgono le proprietà $\qquad A \Rightarrow B$

~~L non reg. $\Longrightarrow$ non valgono le prop.~~ $\qquad \neg A \not\Rightarrow \neg B$

$\neg B \Rightarrow \neg A \quad \equiv$

Non valgono le prop. $\Longrightarrow$ L non è reg.

Enunciato come formula logica.

L regolare $\Longrightarrow$ $\qquad A \Rightarrow B$

$$\Big(\exists n \in \mathbb{N} . \big(\forall w \in L . \; |w| \geq n$$
$$\Rightarrow \big(\exists x, y, z . \; w = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge y \neq \varepsilon$$
$$\wedge \; (\forall i \in \mathbb{N} . \; xy^i z \in L)\big)\big)\Big)$$

$\neg B \Rightarrow \neg A$

giovedì 19 ottobre 2017 16:33

$$\neg\Big(\exists n\in\mathbb{N}.\big(\forall w\in L.\ |w|\geq n \Rightarrow \big(\exists x,y,z.\ w=xyz \wedge |xy|\leq n \wedge y\neq\varepsilon \wedge (\forall i\in\mathbb{N}.\ xy^iz\in L)\big)\big)\Big)$$

$$\equiv \{\text{De Morgan}:\ \neg\exists x.P \equiv \forall x.\neg P\}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}.\ \neg\Big(\big(\forall w\in L.\ |w|\geq n \Rightarrow \big(\exists x,y,z.\ w=xyz \wedge |xy|\leq n \wedge y\neq\varepsilon \wedge (\forall i\in\mathbb{N}.\ xy^iz\in L)\big)\big)\Big)$$

$$\equiv \{\text{De Morgan}:\ \neg\forall x.P \equiv \exists x.\neg P\}$$

$$\Big(\forall n\in\mathbb{N}.\ \Big(\exists w\in L.\ \neg\Big(|w|\geq n \Rightarrow \big(\exists x,y,z.\ w=xyz \wedge |xy|\leq n \wedge y\neq\varepsilon \wedge (\forall i\in\mathbb{N}.\ xy^iz\in L)\big)\Big)\Big)\Big)$$

$$\equiv \{A\Rightarrow B \equiv \neg A \vee B\}$$

$$\neg\big(\neg(|w|\geq n) \vee (\ \ldots\ )\big)$$

$$\equiv \{\text{De Morgan}:\ \neg(A\vee B)\equiv \neg A \wedge \neg B\}$$

$$\big(\cancel{\neg\neg}\,|w|\geq n \wedge \neg\big(\exists x,y,z.\ (w=xyz \wedge |xy|\leq n \wedge y\neq\varepsilon) \wedge (\forall i\in\mathbb{N}.\ xy^iz\in L)\big)$$

$$\equiv \{\text{De Morgan}:\ \neg\exists x.P \equiv \forall x.\neg P\}$$

$$\wedge\big(\forall xyz.\ \neg(\ \wedge\ \wedge\ \wedge\ )\big)$$

$$\ldots\ \forall xyz.\ \neg\big(\overbrace{(w=xyz \wedge |xy|\leq n \wedge y\neq\varepsilon)}^{C} \wedge (\forall i\in\mathbb{N}.$$

$\ldots \quad \forall xyz.\ \neg \left(\underbrace{(w = xyz \wedge |xy| \le m \wedge y \ne \varepsilon)}_{A} \wedge \underbrace{(\forall i \in \mathbb{N}.\ xy^i z \in L)}_{B} \right)$

$= \{ \text{De Morgan} : \neg (A \wedge B) = \neg A \vee \neg B \}$

$\ldots \quad \forall xyz.\ \neg (w = xyz \wedge |xy| \le m \wedge y \ne \varepsilon) \vee$
$\neg (\forall i \in \mathbb{N}.\ xy^i z \in L)$

$\ldots \forall xyz.\ \neg (w = xyz \wedge |xy| \le m \wedge y \ne \varepsilon) \vee$
$\neg (\forall i \in \mathbb{N}.\ xy^i z \in L)$

$\equiv \{ \text{De Morgan} \}$

$\forall x,y,z.\ \neg \underbrace{(\qquad\qquad)}_{A} \vee$
$\underbrace{(\exists i \in \mathbb{N}.\ \underbrace{\neg (xy^i z \in L)}_{xy^i z \notin L})}_{B}$

$\equiv \{ \text{intro} \Rightarrow : \neg A \vee B \equiv A \Rightarrow B \}$

$\ldots \quad \forall x,y,z.\ (w = xyz \wedge |xy| \le m \wedge y \ne \varepsilon)$
$\Rightarrow (\exists i \in \mathbb{N}.\ xy^i z \notin L$

$$\left(\forall m \in \mathbb{N}. \left(\exists w \in L.\ |w| \geq m \wedge \left(\forall x,y,z.\ \left(xyz = w \wedge |xy| \leq m \wedge y \neq \varepsilon\right) \Rightarrow \left(\exists i \in \mathbb{N}.\ xy^iz \notin L\right)\right)\right)\right)$$

$$\Rightarrow$$

L non è regolare.

$$L = \{a^k b^k \mid k > 0\}$$

$$\forall m \in \mathbb{N}.\ \exists w \in L.\ |w| \geq m \Longrightarrow$$

Non facciamo nessuna ipotesi su m.

Prendiamo $a^m b^m \in L$, $m > 0$,

quindi $|a^m b^m| \geq m$

devo far vedere che su $a^m b^m$ vale

$$\left(\forall x,y,z.\ \left(a^m b^m = xyz \wedge |xy| \leq m \wedge y \neq \varepsilon\right) \Rightarrow \left(\exists i \in \mathbb{N}.\ xy^iz \notin L\right)\right)$$

$$a^m b^m = xyz \quad \wedge \quad |xy| \leq m \quad \wedge \quad y \neq \varepsilon$$

$(\quad t$

$$\begin{cases} x = a^t & \emptyset \leq t < n \\ y = a^s & \emptyset < s \leq n - t \\ z = a^e b^n & e = n - s - t \end{cases}$$

può essere $= n$

rappresenta tutte le possibili divisioni di w che rispettano

$(w = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge y \neq \varepsilon)$

$\Rightarrow (\exists i \in \mathbb{N}.\ x y^i z \notin L)$

$$\begin{cases} x = a^s & 0 \leq s < n \\ y = a^t & 0 < t \leq n - s \\ z = a^e b^n & e = n - s - t \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad x y^0 z = a^s a^e b^n \notin L \qquad i = 0$

perché $\quad n = s + t + e$
$t > 0$ $\quad \Rightarrow \quad s + e \neq n$

$L = \{ a b a^k b^k \mid k > 0 \}$

Qualunque n a $n > 0$

prendiamo $a b a^n b^n \in L$

$$\begin{cases} x = \varepsilon \\ y = a \\ z = \cancel{b} a^n b^n \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad x y^0 z = b a^n b^n \notin L$ $\qquad \underline{\underline{i = 0}}$

$x = a$

$y = b a^s \qquad 0 \leq s \leq n - 2$

$z = a^e b^n \qquad e = n - s$

$\Rightarrow \quad x y^0 z = a a^{n-s} b^n \notin L$

$x = a b a^s \qquad 0 \leq s < n - 2 \qquad |xy| \leq n$

$y = a^t \qquad 0 < t \leq n - 2 - s$

$z = a^e b^n \qquad e = n - s - t$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x y^0 z}} = a b a^s a^e b^n \notin L$

$n = s + t + e$

$t > 0$ $\qquad \Rightarrow \quad s + e \neq n$

$L = \{ a^n b^m \mid n > 0 \wedge m > n \}$

abb

$abbb$, $aabbb$

$S \to abb \mid aSb \mid Sb$

Qualunque sia n prendo la stringa

$w = |\underline{a^n b^{n+1}}| \geq n$

$$\begin{cases} x = a^s & \emptyset \leq s < n \\ y = a^t & \emptyset < t \leq n - s \\ z = a^e b^{n+1} & e = n - t - s \end{cases}$$

$\Rightarrow \; x y^2 z \notin L \qquad t \geq 1$

$\underline{i = 2}$

giovedì 19 ottobre 2017 17:33